MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

62. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 24. AUGUST 1955)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1955

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

62. Band — **Inhalt** — 4. Heft

Seite

Fröhlich, A., and J. C. Shepherdson, On the factorisation of polynomials in a finite number of steps 331
Bartle, R. G., Implicit functions and solutions of equations in groups 335
Meinardus, G., Über die Kroneckersche Grenzformel 347
Eweida, M. T., On Newton's series of interpolation 352
Salzmann, H., und K. Zeller, Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen 354
Kasch, F., Abschätzung der Dichte von Summenmengen 368
Nitsche, J., Beiträge zur Verbiegung zweifach zusammenhängender Flächenstücke 388
Itô, N., Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen 400
Baer, R., Nilgruppen 402
Brafman, F., Series of Products of Gegenbauer Polynomials 438
Schieferdecker, E., Zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientenhalbgruppen 443
Eltermann, H., Fehlerabschätzung bei näherungsweiser Lösung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung 469
Hornfeck, B., Berichtigung zur Arbeit: Ein Satz über die Primzahlmenge 502

FRÖHLICH, A., and J. C. SHEPHERDSON
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 331—334 (1955)

On the factorisation of polynomials in a finite number of steps.

By
A. FRÖHLICH and J. C. SHEPHERDSON.

In view of the recent discussion in this Journal ([1], [2]) it seems appropriate to mention briefly here some results on the factorisation of polynomials in a finite number of steps which we intend to publish in more detail elsewhere [3].

1. VAN DER WAERDEN [4] has shown that there is no *general* algorithm applicable to all "explicitly given" fields K for splitting polynomials with coefficients from K into their irreducible factors in $K[x]$[1]). We can strengthen this result by giving a *particular* explicitly given field K_0 for which there is no splitting algorithm. In fact let p_n denote the nth prime number, let $\lambda(n)$ be a recursive function defined for all positive integers n, such that $\lambda(n) \neq \lambda(m)$ *if* $n \neq m$ and such that the integers m satisfying $(\exists n)\,(\lambda(n) = m)$ form a non-recursive class[2]), and let Q denote the field of rational numbers. Then the field $Q(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots)$ where $\vartheta_n = \sqrt{p_{\lambda(n)}}$ is obviously capable of being given an "explicit representation" K_0[3]). But $x^2 - p_m$ is reducible in K_0 if and only if $(\exists n)\,(\lambda(n) = m)$. Since there is no recursive algorithm[4]) for deciding of arbitrarily given m whether this holds or not it follows that there can be no recursive algorithm for deciding whether an element of $K_0[x]$ is reducible or not and hence no algorithm for splitting elements of $K_0[x]$ into their irreducible factors.

We can strengthen similarly a result of M. KNESER [1] by constructing explicitly given fields K, $\overline{K}$ such that $\overline{K}$ is a simple non separable extension of K, and such that K has a splitting algorithm but $\overline{K}$ has not. Here we define $\Delta = GF(2)$, $K_0 = \Delta(x_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, where $x_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ are independent transcendentals over Δ, $K = K_0(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots)$ where $\vartheta_n = (x_{\lambda(n)} + x_0\, y_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $\overline{K} = K\left(\sqrt{x_0}\right)$. It is easily seen that $\overline{K}$ has no splitting algorithm since $x^2 - x_m$ is reducible in $\overline{K}$ if and only if $(\exists n)\,(\lambda(n) = m)$. The proof that K has a splitting algorithm is tedious and is given elsewhere [3].

---

[1]) From now on we shall call such an algorithm a *splitting algorithm* for K.

[2]) For a proof that such a function λ exists see [5]. λ can be chosen to be primitive recursive.

[3]) i.e. a representation by a recursive set of words (i.e. finite sequences) in some finite alphabet $\{a_1, \ldots, a_n\}$ such that there are recursive procedures for deciding when two words W_1, W_2 represent the same element of the field and for computing $-W$, W^{-1} (for those W not representing 0) $W_1 + W_2$, $W_1 \times W_2$.

[4]) See [5], [6], [7] for a discussion of the reasons for identifying "algorithm" with "recursive procedure".

2. On closer inspection the last example given leads to a paradox. For the field $\bar{K}$ which has no splitting algorithm is, as an abstract field, isomorphic to $\Delta(\sqrt{x_0}, \sqrt{x_{\lambda(1)}}, \sqrt{x_{\lambda(2)}}, \ldots, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, y_1, y_2, \ldots)$ where $\{i_1, i_2, \ldots\}$ is an enumeration of the set of those positiveintegers m such that $\sim(\exists n)\,(\lambda(n) = m)$, i.e. the complement of the set $\{\lambda(1), \lambda(2), \ldots\}$. But the elements $\sqrt{x_0}, \sqrt{x_{\lambda(1)}}, \sqrt{x_{\lambda(2)}}, \ldots, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ are easily seen to be independent transcendentals over Δ so that $\bar{K}$ is isomorphic to the field $K' = \Delta(z_1, z_2, \ldots)$ obtained by adjoining $\aleph_0$ independent transcendentals $z_1, z_2, \ldots$. But surely this is an explicit field which has a splitting algorithm (c. f. [8])? The solution of this paradox is that if the elements of K' are represented in the "obvious" way, viz. as polynomials in $z_1, z_2, \ldots$ with coefficients *0* or *1* then there is an algorithm for splitting polynomials with given coefficients into their irreducible factors; if however the elements of K' are represented in the "bizarre" way they are in K then there is no such algorithm. This shows that the sort of properties of fields we are dealing with depend not only on the field as an abstract field but also on the particular "explicit representation" chosen. This fact makes it necessary to re-state all the results of KRONECKER [9], HAUPT [10], VAN DER WAERDEN [4], [8], KNESER [1], making it explicit at each stage that the properties dealt with are properties of particular explicit representations of the abstract fields involved. In particular some care has to be taken with the definition of when an explicit representation of a field K is to be considered as an "explicit" extension of a certain explicit representation of a field K_1. All these details are dealt with fully in [3].

The fact that it is possible to have two explicit representations of the same abstract field which, although abstractly isomorphic, are not explicitly isomorphic[5]), raises the question, "which abstract fields have the property, clearly possessed by the field of rational numbers, that all their explicit representations are explicitly isomorphic?". Our example above shows that there are transcendental extensions of a prime field which do not possess this property. It might be conjectured that all purely algebraic extensions of a prime field necessarily have this property. We have shown that this is false. In fact let $\mu(n)$ be a recursive function such that[6]) there is no algorithm for saying correctly of arbitrarily given positive integers m either "if there exists an n such that $m = \mu(n)$ then n is odd" or "if there exists an n such that $m = \mu(n)$ then n is even". Let Q be the field of rational numbers, let K be the field $Q(u_1, u_2, \ldots)$ where $u_n = \sqrt{p_n}$, and let K_1, K_2 be respectively the "usual"[7]) explicit representations of the fields $K\left(\sqrt{u_{\mu(1)}}, \ldots, \sqrt{u_{\mu(n)}}, \ldots\right)$, $K\left(\sqrt{-u_{\mu(1)}}, \ldots, \sqrt{(-1)^n u_{\mu(n)}}, \ldots\right)$. K_1, K_2 are clearly isomorphic via the automorphism of K defined by $u_{\mu(n)} \leftrightarrow (-1)^n u_{\mu(n)}$. But if ϑ is any explicit

[5]) We call two explicit representations of a field *explicitly isomorphic* if there is an isomorphism $W \leftrightarrow \vartheta(W)$ between the representations such that there is a recursive algorithm for computing $\vartheta(W)$.

[6]) It is not difficult to prove the existence of such a function μ. See [3]. μ can be taken to be primitive recursive.

[7]) This is defined precisely in [3].

isomorphism of K_1 onto K_2 then since the only roots of $x^2 - p_m = 0$ in K_1 and K_2 are $\pm u_m$ we must have, for all m, $\vartheta(u_m) = \pm u_m$. Also the only roots of $x^4 - p_{\mu(n)} = 0$ are $\pm\sqrt{u_{\mu(n)}}$ in K_1 and $\pm\sqrt{(-1)^n u_{\mu(n)}}$ in K_2; so $\vartheta(\sqrt{u_{\mu(n)}}) = \pm\sqrt{(-1)^n u_{\mu(n)}}$ and hence $\vartheta(u_{\mu(n)}) = (-1)^n u_{\mu(n)}$. So for any integer m we can find $\vartheta(u_m) = \pm u_m$ and if the sign is $+$ we can correctly say "*if* there exists an n such that $m = \mu(n)$ then n is even"; if the sign is $-$ we can say "if there exists an n such that $m = \mu(n)$ then n is odd". This is contrary to our hypothesis about μ hence such a ϑ cannot exist.

However it is easily proved that all finite extensions of prime fields have the property that all their explicit representations are explicitly isomorphic. Our strongest result of this kind is the following:

Let P be a prime field and let K be a field $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ where

(i) there is an algorithm for deciding, for arbitrarily given n, whether α_n is algebraic or transcendental over $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$,

(ii) there is an algorithm for finding, for those n such that α_n is algebraic over $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ a polynomial $\varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ in $x_1, \ldots, x_n$ with coefficients in P such that $\varphi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, x) = 0$ is an irreducible equation for α_n over $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Then the field K has explicit representations. If further

(iii) every isomorphism of a finite subfield $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ of K into K can be extended to an automorphism of K, then every pair of explicit representations of K are explicitly isomorphic.

3. KRULL ([2], pt. I) distinguishes various kinds of splitting algorithm according to various ways in which bounds can be given for the number of steps required by the process. It seems to us that in order to be significant his definitions need to be supplemented by precise definitions of what kinds of functions are permissible as "bounding functions". Let us take the simple case of a function $f(n)$ of a single positive integer variable. Let us say that f is bounded by g if the computation of $f(n)$ according to some standard procedure requires $\leq g(n)$ "steps". If we identify "computable" with "general recursive" in the usual way (cf. [5], [6], [7]) then according to this definition *every* computable function is bounded by some computable function g—e.g. by the function $g_0(n)$ = number of steps taken for the computation of $f(n)$—this $g_0(n)$ is clearly a computable function! So one does not narrow the class of computable functions by restriction to those functions which are bounded by computable functions. Such a narrowing will only be achieved by requiring the bounding function to be a special kind of computable function. The desire to effect such a restriction of the class of computable functions can hardly be motivated by practical considerations, since with repeated exponentiation alone it is possible to define functions g whose values for quite small n are so large that a computation involving $g(n)$ steps would take centuries even if carried out by high speed computing machines. Presumably, then, the desire to narrow down the class of computable functions is motivated by a feeling of distrust for the classical use of the excluded middle which may be involved in the proof that the function $f(n)$ really is recursive.

e.g. if $f(n)$ is given in KLEENE's standard form as $\varphi(\mu n \psi(m, n))$, where $\mu n \psi(m, n)$ denotes "the least n such that $\psi(m, n)$ holds", then the law of the excluded middle will generally be needed to prove that for all m there does exist an n such that $\psi(m, n)$. A proof that there exists such an $n \leqq g(m)$, where g is some function already accepted as computable would perhaps make one feel a little more certain that there really was such an n than would the mere knowledge that the assumption $(n) \sim \psi(m, n)$ leads to contradiction. But if this is the reason for the proposed narrowing of the class of computable functions it seems only reasonable to adopt the following procedure: Start with some class C_0 of commutable functions which are accepted as being "genuinely" computable. Then successively enlarge C_0 by counting as acceptable any function which is bounded by an acceptable function (i.e. computable in an acceptable number of steps) and so on. One would then end up with a class C of computable functions which is closed in the sense that any function bounded by a member of C belongs to C. It would be interesting to know what sub-classes of the class of computable functions are closed in this sense. Presumably the class of primitive recursive functions and the class of multiply recursive functions, are closed. In order to make KRULL's distinctions significant it seems that one would have to take some closed proper sub-class C of the class of computable functions and interpret statements such as "there exists a bound for the number of steps which can be computed directly from n", as meaning "there exists a function f belonging to C such that the number of steps is $\leqq f(n)$. However it seems to us probable that whatever proper sub-class C of the class of computable functions were selected there would be functions not in C which everyone would agree were quite definitely computable. So we prefer to adopt the procedure accepted by most logicians and metamathematicians of using "computable" in the sense of TURING [7], i.e. accepting all general recursive functions as computable. By doing this we destroy the distinctions created by KRULL.

References.

[1] KNESER, M.: Bemerkung über die Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten. Math. Z. **57**, 238—240 (1953). — [2] KRULL, W.: Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten I, II, III. Math. Z. **59**, 57—60, 296—298 (1953); **60**, 109—111 (1954). — [3] FRÖHLICH, A., and J. C. SHEPHERDSON: Effective Procedures in field theory. Submitted to the Trans. Roy. Soc., London. — [4] WAERDEN, B. L. VAN DER: Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen. Math. Ann. **102**, 738—739 (1930). — [5] KLEENE, S. C.: General recursive functions of natural numbers. Math. Ann. **112**, 727—742 (1936). — [6] CHURCH, A.: An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. **58**, 345—363 (1936). — [7] TURING, A. M.: On computable numbers. Proc. London Math. Soc. (2) **42**, 230—265 (1937). — [8] WAERDEN, B. L. VAN DER: Moderne Algebra, first edit. Vol. 1. 1930. — [9] KRONECKER, L.: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Crelles J. **92**, 11—13 (1882). — [10] HAUPT, O.: Lehrbuch der Algebra, Vol. 2, chpt. 23, § 7 (1929).

King's College, London.

Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. (USA.) and University of Bristol, England.

(Eingegangen am 13. Dezember 1954.)

BARTLE, R. G.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 335—346 (1955)

Implicit functions and solutions of equations in groups*).

By

ROBERT G. BARTLE.

In this paper we will be concerned with the possibility of extending the theory of implicit functions and of local inversion to mappings with domain and range in metric groups. It is seen that under certain restrictions the notion of derivative may be introduced and employed to advantage in extending the classical results of HILDEBRANDT and GRAVES [*10*][1]) to this realm. At the same time we drop the hypothesis that the derivative be one-to-one, in which case uniqueness is not generally present; this extends recent results of GRAVES [*9*]. Conditions are given which are sufficient to insure that if $y_0 = f(x)$ has k solutions and if y_1 is near y_0, then $y_1 = f(x)$ has at least (or exactly) k solutions, or that if the first equation has a continuum of solutions then so does the second.

It should be mentioned that our hypotheses are more stringent than are required in certain classical cases, but if more structure is present then some of our conditions are automatically (or easily) satisfied. Further, we do not investigate here questions of the differentiability of the solution or inverse functions. This delicate problem was treated in detail in the case of BANACH spaces by HILDEBRANDT and GRAVES.

1. *Basic results on smooth mappings.* Let $\mathfrak{X}$ be a topological group. Although we do not assume that $\mathfrak{X}$ is abelian, we will always write the group operation as addition since this notation is more suggestive for our purposes. We suppose that the topology of $\mathfrak{X}$ is given by a right-invariant metric function d; hence $d(x_1, x_2) = d(x_1 + x_3, x_2 + x_3)$, $x_i \in \mathfrak{X}$. We define the "norm" in $\mathfrak{X}$ by

$$\|x\| \equiv d(x, 0).$$

The reader may readily verify that this norm has the following properties:

(i) $\|x\| = 0$ if and only if $x = 0$;

(ii) $\|-x\| = \|x\|, \quad x \in \mathfrak{X}$;

(iii) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|, \quad x_i \in \mathfrak{X}$.

*) The basic results in this paper were obtained while the author was an A. E. C. Fellow at Yale University. They were extended while he was under contract with the O. N. R.

[1]) Numbers in brackets refer to the list of references at the end of the paper.

We denote open spheres by $S(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ and agree to employ terms that are standard in metric and linear spaces without further mention.

If α and β are real numbers, then the symbols $\alpha \wedge \beta$ and $\alpha \vee \beta$ denote their minimum and their maximum, respectively.

In the following we take $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ to be *groups bearing right-invariant metrics*. Because it is needed in the fundamental Theorem 1.3, we will suppose that $\mathfrak{X}$ is *complete* under its metric. We will be concerned with the existence of solutions of the equation

$$(*) \qquad y = f(x),$$

where f is a continuous map of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$. It goes without saying that additional restrictions must be put on f, but no further structure will be assumed about $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ without explicit mention, and only in § 5. A notational distinction between the norms, or between the identities in $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ and the scalar number zero is not necessary for us and will not be made.

The following notion will be important in the sequel:

1.1. *Definition.* A continuous function f defined on a subset $\mathfrak{X}_0 \subseteq \mathfrak{X}$ to $\mathfrak{Y}$ with $y_0 = f(x_0)$ is said to be *smooth at* x_0 if there are positive numbers α und β depending on f and x_0 such that if $0 < \|y - y_0\| < \beta$, then there is at least one $x \in \mathfrak{X}_0$ with $y = f(x)$ and $\|x - x_0\| \leq \alpha \|y - y_0\|$. In such a case we will sometimes say that f is (α, β)-*smooth at* x_0. We mention that if f is (α, β)-smooth, then it is trivially (α', β')-smooth for any $\alpha' \geq \alpha$ and $\beta' \leq \beta$.

Intuitively, the requirement of smoothness at x_0 is analogous to (but different from) the requirement that the "slope" of the function is not identically zero in a neighborhood of x_0, although it may vanish at x_0 and at occasional points nearby. It is worth observing that this smoothness property is certainly satisfied for a function of a real variable if f has a derivative bounded away from zero near x_0. The functions $f(x) \equiv x^2$ and $f(x) \equiv x^3$ both fail to be smooth at $x = 0$ even though the latter function is a homeomorphism of the real line. On the other hand the mappings defined by

$$f(x) \equiv (\text{signum } x)\,|x|^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad f(x) \equiv (\text{signum } x)\,|x \sin \pi/x|$$

are smooth at $x = 0$ even though the latter fails to have a derivative at a sequence of points converging to zero and the derivative vanishes at another such sequence.

The following lemma on translation of the smoothness property for homomorphisms is proved by a simple calculation.

1.2. *Lemma. Let h be a continuous homomorphism of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$. Then h is (α, β)-smooth at $x = 0$ if and only if it is (α, β)-smooth at any point in $\mathfrak{X}$. Further if h is smooth then it takes open sets into open sets.*

If $\mathfrak{X}$ is also known to be separable, then it is known [2] [17; 299] that the range of h is of the second category in $\mathfrak{Y}$. If h is a smooth linear operator

between F-spaces, it maps onto $\mathcal{Y}$; we do not know other conditions under which it is certain that h maps onto $\mathcal{Y}$.

Our first theorem embodies the process of successive approximations and will be vital for later use. This result is essentially due to GRAVES [9], but because of its fundamental nature and for the convenience of the reader, we carry out here the simple changes that the non-commutativity requires.

1.3. *Theorem. Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ be as above; let f be a continuous function on $S(x_0, \gamma)$ to $\mathcal{Y}$, and let $y_0 = f(x_0)$. Suppose that h is a continuous homomorphism of $\mathcal{X}$ into $\mathcal{Y}$ which is (α, β)-smooth and such that*

$$(\dagger) \qquad \|[f(x_1) - f(x_2)] - [h(x_1) - h(x_2)]\| \leq \delta \|x_1 - x_2\|, \qquad x_i \in S(x_0, \gamma),$$

where $\alpha\,\delta < 1$. Then f is smooth at x_0. More precisely, if $\|y - y_0\| < r \equiv (1 - \alpha\,\delta)(\beta \wedge \alpha^{-1}\gamma)$, it follows that the equation

$$(*) \qquad y = f(x)$$

has at least one solution x with $\|x - x_0\| \leq \alpha(1 - \alpha\,\delta)^{-1}\|y - y_0\| < \gamma$.

Proof. Replacing f by the function $F: S(0, \gamma) \to \mathcal{Y}$ defined by $F(x) \equiv f(x + x_0) - y_0$, we see that it suffices to prove the theorem under the assumption that $x_0 = 0 = y_0$.

Let $y \in \mathcal{Y}$ be such that $\|y\| < r$ and choose x_1 such that $y = h(x_1)$ and $\|x_1\| \leq \alpha\|y\| < \gamma(1 - \alpha\,\delta)$. Set $y_1 \equiv h(x_1) - f(x_1)$, so by (†) we have $\|y_1\| \leq \delta\|x_1\| \leq \alpha\,\delta\|y\| < \beta$. By induction choose x_n, $n > 1$ such that

$$(1) \qquad y_{n-1} = h(x_n - x_{n-1})$$

and define y_n by

$$(2) \qquad y_n \equiv y_{n-1} + f(x_{n-1}) - f(x_n).$$

Since h is (α, β)-smooth, x_n can be chosen to satisfy $\|x_n - x_{n-1}\| \leq \alpha\|y_{n-1}\|$, provided that $\|y_{n-1}\| < \beta$. By (2), (1) and (†) we have

$$\|y_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1}) - h(x_n - x_{n-1})\| \leq \delta\|x_n - x_{n-1}\| \leq \alpha\,\delta\|y_{n-1}\|,$$

provided that x_n and x_{n-1} are in $S(0, \gamma)$. By recursion we have

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq \alpha(\alpha\,\delta)^{n-1}\|y\|, \qquad \|y_n\| \leq (\alpha\,\delta)^n\|y\|,$$

from which it follows that $\|x_n\| \leq \alpha(1 - \alpha\,\delta)^{-1}\|y\| < \gamma$ and that $\|y_n\| < \beta$, so the induction is possible. Further, $\{x_n\}$ is a CAUCHY sequence converging to some point x with $\|x\| \leq \alpha(1 - \alpha\,\delta)^{-1}\|y\|$, and $y_n \to 0$. By repeated application of (2) we obtain $y_n = y - f(x_n)$ from which we have $y = f(x)$.

We now treat the case in which h is an isomorphism.

1.4. *Theorem. If, in addition to the hypotheses of Theorem* 1.3, *we assume that h is an isomorphism, then it follows that for $\|y - y_0\| < \frac{1}{2}r$, the equation $(*)$ has a unique solution in the sphere $S(x_0, r')$, where $r' \equiv \frac{1}{2}(\alpha\,\beta \wedge \gamma)$. Hence the inverse function $f^{-1}: S(y_0, \frac{1}{2}r) \to S(x_0, r')$ is single-valued. Further, $f^{-1}: S(y_0, \frac{1}{4}r) \to S(x_0, \frac{1}{2}r')$ is uniformly continuous.*

Proof. Let $\|y-y_0\|<\frac{1}{2}r$; by Theorem 1.3, equation (*) has a solution x with $\|x-x_0\|\leq\alpha(1-\alpha\delta)^{-1}\|y-y_0\|<\frac{1}{2}\alpha(\beta\wedge\alpha^{-1}\gamma)=\frac{1}{2}(\alpha\beta\wedge\gamma)=r'$. If $x_1\in S(x_0,r')$ is another such solution, then by (†), we have

$$\|h(x-x_1)\|\leq\delta\|x-x_1\|.$$

But $\|x-x_1\|\leq\|x-x_0\|+\|x_1-x_0\|<\alpha\beta$ and so $\|h(x-x_1)\|<\beta$. Since h is (α,β)-smooth and also one-to-one, we have

$$\|x-x_1\|\leq\alpha\|h(x-x_1)\|\leq\alpha\delta\|x-x_1\|.$$

Since $\alpha\delta<1$, this is a contradiction unless $x=x_1$. Hence (*) is uniquely solvable in the indicated spheres.

To show that f^{-1} is uniformly continuous on the smaller sphere, let $y'\in S(y_0,\frac{1}{4}r)$. Then as above, $x'\equiv f^{-1}(y')$ is in $S(x_0,\frac{1}{2}r')$. If $F:S(x_0,\gamma)\to\mathcal{Y}$ is defined by

$$F(x)\equiv f(x)-f(x'),$$

it follows that (†) holds with f replaced by F. Now take y such that $\|y-y'\|<\frac{1}{4}r$; from Theorem 1.3 we see that

$$y-y'=F(x)=f(x)-y'$$

has a solution x with $\|x-x'\|\leq\alpha(1-\alpha\delta)^{-1}\|y-y'\|<\frac{1}{2}r'$. Now since $\|y-y_0\|<\frac{1}{2}r$ and $\|x-x_0\|<r'$, it follows that the solution x just found is the only one in this latter sphere. Hence $x=f^{-1}(y)$, and we have proved that if $y'\in S(y_0,\frac{1}{4}r)$ and if $\|y-y'\|<\frac{1}{4}r$, then

$$\|f^{-1}(y)-f^{-1}(y')\|=\|x-x'\|\leq\alpha(1-\alpha\delta)^{-1}\|y-y'\|,$$

and the uniform continuity is proved.

1.5. *Definition.* Let $\mathfrak{H}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ denote the set of all continuous homomorphisms of $\mathfrak{X}$ into $\mathcal{Y}$. If $g,h\in\mathfrak{H}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$, let

$$(g,h)\equiv\sup\left\{\frac{\|g(x)-h(x)\|}{\|x\|}:x\neq 0\right\},$$

$$\varrho(g,h)\equiv\frac{(g,h)}{1+(g,h)}.$$

Then it is readily seen that ϱ is a metric function on the space $\mathfrak{H}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$.

The following corollary parallels a result of GRAVES [9] for linear operators in BANACH spaces. Its proof follows readily from Theorems 1.3 and 1.4 and will be omitted.

1.6. *Corollary. Let $\mathfrak{X}$ and $\mathcal{Y}$ be as before. Then the set of all smooth homomorphisms and the set of all smooth isomorphisms are open in the ϱ-topology of $\mathfrak{H}(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$.*

1.7. *Remark.* If $\mathfrak{X}$ and $\mathcal{Y}$ are BANACH spaces and h is a continuous linear mapping of $\mathfrak{X}$ onto $\mathcal{Y}$, then it is a corollary of the Interior mapping theorem that h is smooth. If $\mathfrak{X}$ and $\mathcal{Y}$ are complete separable metric groups, then it was proved by BANACH [2] (see also PETTIS [17]) that the Interior mapping

theorem remains valid for homomorphisms mapping $\mathfrak{X}$ onto $\mathfrak{Y}$). However, lacking homogeneity with respect to scalar multiples, the writer has not been able to settle whether such mappings need be smooth.

2. *Differentiability and the implicit function theorem.* In this section we define a derivative[2]) of a function $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ at a point x_0, and show that under certain circumstances the smoothness of this derivative at x_0 implies that f maps onto a neighborhood of $f(x_0)$.

2.1. *Definition.* Let $\mathfrak{X}_0$ be an open set in the metric group $\mathfrak{X}$. A function $f: \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}$ is said to have a *derivative* $f'(x_0)$ at the point $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ if $f'(x_0)$ is a continuous homomorphism of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$ such that

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{1}{\|u\|} \|f(u + x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(u)\| = 0.$$

[We will ordinarily write $f'(x_0|u)$ for $f'(x_0)(u)$.]

2.2. *Definition.* If $\mathfrak{X}_0$ is open in $\mathfrak{X}$, then $f: \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}$ is said to be in *class* $C'(\mathfrak{X}_0)$ if it has a derivative at every point of $\mathfrak{X}_0$ and if for every $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ and $\varepsilon > 0$ there is a number $\pi = \pi(x_0, \varepsilon)$ such that if $x_1, x_2 \in S(x_0, \pi)$ then

(i) $$\|f'(x_1|u) - f'(x_0|u)\| < \varepsilon \|u\|, \qquad u \in \mathfrak{X};$$

(ii) $$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_0|x_1 - x_2)\| < \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Note[3]). If $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ are BANACH spaces, then (ii) is automatically satisfied so that this definition of the class $C'(\mathfrak{X}_0)$ coincides with the definition of HILDEBRANDT and GRAVES [*10*]. The validity of this assertion follows from the generalization of TAYLOR'S theorem due to GRAVES [*8*].

2.3. *Lemma. If f is in class $C'(\mathfrak{X}_0)$, and if $f'(x_0)$ is smooth for some x_0, then $f'(x)$ is smooth for x in a neighborhood of x_0. If, in addition, $f'(x_0)$ is a smooth isomorphism, the same is true for $f'(x)$ when x is sufficiently near to x_0. Let $f'(x)$ be smooth for $x \in \mathfrak{X}_0$, and let $A(x)$ and $B(x)$, $x \in \mathfrak{X}_0$, be defined to be*

$$A(x) \equiv \inf \alpha, \qquad B(x) \equiv \sup \beta$$

over all pairs (α, β) for which $f'(x)$ is (α, β)-smooth. Then A is upper semi-continuous and B is lower semi-continuous on $\mathfrak{X}_0$.

The first statements follow immediately from 2.2 (i) and 1.6. The final statement follows from 2.2 (i) and Theorem 1.3.

2.4. *Theorem. Suppose that f is in class $C'(S(x_0, a))$, that $y_0 = f(x_0)$ and that $f'(x_0)$ is smooth; then f is smooth at x_0. If, in addition, $f'(x_0)$ is an isomorphism, then f has a uniformly continuous local inverse at x_0.*

---

[2]) Derivatives of functions in groups have been defined and discussed before—see the papers of MICHAL and MILLSAPS cited in the references, and see HYERS [*11*] for a general discussion.

[3]) The reader is asked to observe that we neither state nor require uniqueness of the derivative or the usual algebraic facts concerning it. All we demand is approximation by a homomorphism.

The last conclusion means that there are neighborhoods of x_0 and y_0 such that if the domain and range of f^{-1} is restricted to these neighborhoods, then it is single-valued and uniformly continuous.

Proof. This result follows from Theorems 1.3 and 1.4. However, it behooves us to make precise the neighborhoods under question. We suppose that $f'(x_0)$ is (α, β)-smooth. Let $\pi\left(x_0, (2\alpha)^{-1}\right)$ be as in Definition 2.2. It follows from Theorem 1.3 that if $\|y - y_0\| < r$, where

$$r \equiv \tfrac{1}{2}\left[\beta \wedge \alpha^{-1} a \wedge \alpha^{-1}\pi\left(x_0, (2\alpha)^{-1}\right)\right],$$

then there is at least one x with $y = f(x)$ and such that $\|x - x_0\| \leq 2\alpha\|y - y_0\|$. If $f'(x_0)$ is an isomorphism, then Theorem 1.4 implies that f has a uniformly continuous local inverse on $S(y_0, \frac{1}{4}r)$ to the sphere about x_0 with radius $\frac{1}{4}\left[\alpha\beta \wedge a \wedge \pi\left(x_0, (2\alpha)^{-1}\right)\right]$.

2.5. *Definition.* If $\mathfrak{X}_0$ is an open set, if f is in class $C'(\mathfrak{X}_0)$ and if at every point x_0 of $\mathfrak{X}_0$, $f'(x_0)$ is smooth, then we say that f is in *class* $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_0)$ or that f is *differentiably smooth* on $\mathfrak{X}_0$. If, in addition, the function π of Definition 2.2 does not depend on x we say that f is in *class* $\mathfrak{S}^*(\mathfrak{X}_0)$ or that f is *uniformly differentiably smooth* on $\mathfrak{X}_0$.

With this terminology we may state the following result concerning *invariance of domain.* We recall that a function is said to be *locally one-to-one* at a point if that point has a neighborhood on which it is one-to-one.

2.6. *Corollary. If f is in class $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_0)$, then f is smooth and sends open sets into open sets. If at every point f' is a smooth isomorphism, then f is locally one-to-one and has a uniformly continuous local inverse at every point of $f(\mathfrak{X}_0)$.*

As would be expected, the preceding results can be used to give an implicit function theorem. In order to formulate this result, let $\mathfrak{Z}$ be a (possibly incomplete) group with a right invariant metric, and let $\mathfrak{Z}_0$ be an open subset of $\mathfrak{Z}$. Let $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Z}$ be the Cartesian product of these groups with the obvious algebraic operation and with the norm $\|[x, z]\| = \|x\| \wedge \|z\|$. Let $F: \mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{Z}_0 \to \mathfrak{Y}$, then we observe that Definitions 2.1 and 2.2 are meaningful for the function F. If $F'(x_0, z_0)$ is a derivative of F at $[x_0, z_0]$, then the *partial derivative* of F with respect to x at $[x_0, z_0]$ is the homomorphism $F_x(x_0, z_0)$ of $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{Y}$ defined by $F_x(x_0, z_0|u) \equiv F'(x_0, z_0|u, 0)$. We note that if z_0 is held fixed, then $F_x(x_0, z_0)$ is in fact a derivative of the function $F(\cdot, z_0)$ at x_0 in the previous sense. Further, if F is in class $C'(\mathfrak{X}_0\times\mathfrak{Z}_0)$, then for each fixed $z_0 \in \mathfrak{Z}_0$, the function $F(\cdot, z_0)$ is in class $C'(\mathfrak{X}_0)$.

With these preliminaries settled, we may now state the following *Implicit function theorem:*

2.7. *Theorem. Let F be in class $C'(\mathfrak{X}_0\times\mathfrak{Z}_0)$ with values in $\mathfrak{Y}$, let $F(x_0, z_0) = 0$, and suppose that $F_x(x_0, z_0)$ is smooth. Then there exist constants p_1 and p_2 such that if $z \in S(z_0, p_2)$, there is at least one solution x of the equation*

$$(**) \qquad F(x, z) = 0$$

with $x \in S(x_0, p_1)$. *Further, if* F_x *is an isomorphism, there is a single-valued continuous function* f *defined on a neighborhood of* z_0 *to a neighborhood of* x_0 *with* $x_0 = f(z_0)$ *and such that for all* z *in this neighborhood we have* $F(f(z), z) = 0$.

Proof. Suppose that $F_x(x_0, z_0)$ is (α, β)-smooth. Take $\pi = \pi(x_0, z_0, (2\alpha)^{-1})$ such that if $\|x_i - x_0\| < \pi$ and $\|z - z_0\| < \pi$, then

$$\|F(x_1, z) - F(x_2, z) - F_x(x_0, z_0|x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2\alpha}\|x_1 - x_2\|.$$

Let G^z be defined by $G^z(x) \equiv F(x, z) - F(x_0, z)$ for $x \in S(x_0, \pi)$ and $z \in S(z_0, \pi)$. Then we have

$$\|G^z(x_1) - G^z(x_2) - F_x(x_0, z_0|x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2\alpha}\|x_1 - x_2\|.$$

Since $F(x_0, z)$ is continuous, there is a number $p_2 \leq \pi$ such that if $\|z - z_0\| < p_2$ then $\|F(x_0, z)\| < \frac{1}{2}(\beta \wedge \alpha^{-1}\pi)$. It follows from Theorem 1.3 that for such z, the equation

$$-F(x_0, z) = G^z(x) = F(x, z) - F(x_0, z)$$

has a solution x with $\|x - x_0\| \leq 2\alpha\|F(x_0, z)\|$, and this x is a solution for equation $(**)$.

The final statement follows from Theorem 1.4 and its proof and will be left to the reader.

We note that in the case of BANACH spaces, considerably more refined results giving the differentiability of the solution function f have been obtained by HILDEBRANDT and GRAVES [*10*].

3. *Finite number of solutions.* It sometimes happens that a functional equation is of such a type that it can possess only a finite number of solutions for a particular element y_0 in its range. It is then of interest to inquire about the number of solutions possible for a point near y_0, or for general points in the range. Simple examples indicate that relatively strong conditions are required to obtain any information—we now take a few steps in this direction.

3.1. *Theorem. Let* f *be in class* $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_0)$, *where* $\mathfrak{X}_0$ *is open, and let* $y_0 = f(x)$ *have* k *distinct solutions* $x_1, \ldots, x_k$ *in* $\mathfrak{X}_0$. *Then there exist positive numbers* α *and* p_0 *such that the spheres* $S(x_i, 2\alpha p_0)$, $i = 1, \ldots, k$, *are disjoint and such that if* $\|y - y_0\| < p \leq p_0$, *then equation* $(*)$ *has at least* k *distinct solutions, one solution lying in each of the spheres* $S(x_i, 2\alpha p)$.

Proof. Choose a such that $S(x_i, a) \subseteq \mathfrak{X}_0$, $i = 1, \ldots, k$. By hypothesis $f'(x_i)$ is (α_i, β_i)-smooth. Let $\alpha \equiv \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_k$ and $\beta \equiv \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$. If

$$p_0 \equiv \tfrac{1}{2}\Big[\beta \wedge \alpha^{-1} a \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \alpha^{-1}\pi\big(x_i, (2\alpha)^{-1}\big) \wedge \bigwedge_{i \neq j} (2\alpha)^{-1}\|x_i - x_j\|\Big],$$

then the spheres $S(x_i, 2\alpha p)$ are seen to be disjoint. If $\|y - y_0\| < p \leq p_0$, equation $(*)$ has solutions u_i, $i = 1, \ldots, k$, with $\|u_i - x_i\| \leq 2\alpha\|y - y_0\| < 2\alpha p$ and which are necessarily distinct.

The reader can show that if $f'(x_i)$ is an isomorphism for $i = 1, \ldots, k$, and if $\|y - y_0\| < \frac{1}{2}p_0$, then each of the solutions of $(*)$ in the spheres $S(x_i, \alpha p_0)$

is uniquely determined. However, this statement should not be construed so as to deny the possibility that there may be solutions lying outside of these spheres. It is desirable to know conditions under which it can be asserted that the solutions of (*) be in the specified spheres. We see below that uniform continuity of f' plus the boundedness of the functions A and $1/B$ (compare Lemma 2.3) gives such a condition. Now the requirement of uniformity of a continuous function, or boundedness of semi-continuous functions is not an unduly restrictive *local* condition, but it becomes so when imposed globally. Hence, we prefer to state the next result locally, even though this is somewhat more cumbersome.

3.2. *Theorem. Let f be in class $\mathfrak{S}^*(S(0, R))$ and let $y_0 = f(x)$ have k distinct solutions $x_1, \ldots, x_k$ in $S(0, R)$. Suppose that $A(x)$ and $[B(x)]^{-1}$ are bounded for x in $S(0, R)$. Then there exist positive numbers α and p_0 as in Theorem 3.1 and such that if $\|y - y_0\| < p \leq p_0$, then every solution x of (*) with $\|x\| < R - 2\alpha p_0$ is contained in some sphere $S(x_i, 2\alpha p)$.*

Proof. Let a be such that $S(x_i, a) \subset S(0, R)$, and let $A(x) \leq \alpha < \infty$, $B(x) \geq \beta > 0$ for $x \in S(0, R)$. Let $\pi(\varepsilon)$ be the (uniform) modulus of continuity of f'. Then if $p_0 = \frac{1}{2}\left[\beta \wedge \alpha^{-1} a \wedge \alpha^{-1} \pi\left((2\alpha)^{-1}\right) \wedge \bigwedge_{i \neq j} (2\alpha)^{-1} \|x_i - x_j\|\right]$, it follows as before that if $\|y - y_0\| < p \leq p_0$, then $y = f(x)$ has solutions u_i, $i = 1, \ldots, k$, such that $\|u_i - x_i\| \leq 2\alpha \|y - y_0\| < 2\alpha p$. Now let u be any solution of $y = f(x)$ with $\|u\| < R - 2\alpha p_0$. It follows as in the proof of Theorem 2.4 that there is a solution x_0 of $y_0 = f(x)$ such that $\|x_0 - u\| \leq 2\alpha \|y_0 - y\| < 2\alpha p_0$, so $\|x_0\| < R$; hence x_0 must be some one of the solutions $x_1, \ldots, x_k$. Consequently u is in one of the indicated spheres.

The global situation is simpler.

3.3. *Corollary. Let f be in class $\mathfrak{S}^*(\mathfrak{X})$, let $y_0 = f(x)$ have k distinct solutions, and suppose that $A(x)$ and $[B(x)]^{-1}$ are bounded for $x \in \mathfrak{X}$. Then if y is sufficiently close to y_0, equation (*) has at least k solutions which lie within neighborhoods of the solutions of $y_0 = f(x)$. Further, every such solution of (*) lies in some neighborhood of the solutions of $y_0 = f(x)$.*

If, in addition, to the hypotheses of 3.2 it is known that f' is an isomorphism, then statements concerning uniqueness of solutions of (*) near the x_i may be made. We will not pursue this matter. We note that this assumption excludes the possibility of a branch type singularity, and for that reason it is best made locally. Consideration of branch points is delicate, and we have not been able to treat them satisfactorily in this generality, although for more special cases they have been discussed, e.g. in [3].

4. *Continuation procedures.* In this section we will be concerned with the familiar procedure of the continuation of solutions. Similar discussions have been applied, e.g. in [5], [6], [7], [16]. Sharper results may be obtained in linear spaces, since the notion of line segment is available there. We will content ourselves, however, with the general group case.

By a *curve*, we mean a continuous image of the unit interval. We will see that results similar to those obtained in § 3 are available under somewhat

different hypotheses. In particular, the uniformity assumptions will be replaced by certain familiar compactness conditions. This permits us to get away from a locality of the (known) solutions of $y_0 = f(x)$. For simplicity, we assume that f is differentiably smooth on all of $\mathfrak{X}$, although these methods are also applicable to smaller portions of the space $\mathfrak{X}$.

4.1. *Theorem. Let f be in $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ and suppose that $y_0 = f(x)$ has k distinct solutions. Suppose y_1 can be joined to y_0 by a curve Γ in $f(\mathfrak{X})$ whose inverse image is conditionally compact, and suppose that f is locally one-to-one on $f^{-1}(\Gamma)$. Then the equation $y_1 = f(x)$ has exactly k distinct solutions.*

Proof. Let $\gamma : [0, 1] \to \mathfrak{Y}$, $\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = y_1$, be a parametrization for the curve Γ, and set $F(x, t) \equiv f(x) - \gamma(t)$. We denote the k solutions of $y_0 = f(x)$ by $x_1, \ldots, x_k$. It follows from the semi-continuity of A and B and the compactness of $f^{-1}(\Gamma)$ that numbers α and β may be found such that $f'(x)$ is (α, β) smooth for any $x \in f^{-1}(\Gamma)$. The reader will see that even though γ is not assumed to be differentiable, the simple nature of F permits application of the proof of Theorem 2.7. Since f is locally one-to-one on $f^{-1}(\Gamma)$ we conclude that there exist k uniquely determined functions $g_i : [0, 1] \to \mathfrak{X}$ such that $f(g_i(t)) = \gamma(t)$, and $g_i(0) = x_i$, $i = 1, \ldots, k$. The continuity of the g_i follows from the openness of f. In this manner we have "continued" the solutions of $y_0 = f(x)$ into solutions of $y_1 = f(x)$. It follows from the local one-to-oneness that the solutions $g_i(1)$ of $y_1 = f(x)$ are all distinct. If this latter equation had any solution not already obtained, a reverse process would permit the continuation of this into a solution of $y_0 = f(x)$. But the x_i were supposed to be the totality of the solutions of this initial equation. This completes the proof.

In the remainder of this section we will find it convenient to employ a condition due to CACCIOPPOLI [5]. We say that f is an *inverse compact* mapping if it is true that the conditional compactness of a set in $\mathfrak{Y}$ implies the conditional compactness of its inverse image under f.

4.2. *Theorem. Let $\mathfrak{X}$ be arcwise connected, and suppose that f is locally one-to-one, inverse compact and in $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. If there is one point in $\mathfrak{Y}$ which is the image under f of exactly $k (< \infty)$ points, then every point in $f(\mathfrak{X})$ is the image of exactly k points, and the inverse f^{-1} is a continuous k-valued function on $f(\mathfrak{X})$ to $\mathfrak{X}$.*

The proof of this statement follows from the preceding theorem and will be omitted.

We now see that if $\mathfrak{Y}$ is known to be connected and simply connected in the usual topological sense, then the situation simplifies somewhat. The argument here is a modification of one due to CACCIOPPOLI, which goes back to LÉVY [12].

4.3. *Theorem. Let $\mathfrak{X}$ be arcwise connected and let $\mathfrak{Y}$ be connected and simply connected. Suppose that f is locally one-to-one, inverse compact and in $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. Then f is a homeomorphism of $\mathfrak{X}$ onto $\mathfrak{Y}$.*

Proof. It is seen that if f is inverse compact, then $f(\mathfrak{X})$ is closed, and if f is in $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$, then $f(\mathfrak{X})$ is open. Hence the connectedness of $\mathfrak{Y}$ implies that $f(\mathfrak{X})=\mathfrak{Y}$. Suppose that x_0 and x_0' are distinct points mapping into y_0 and let L_0 be a curve from x_0 to x_0'. Then L_0 is mapped by f into a closed curve Γ_0 through y_0. Since $\mathfrak{Y}$ is simply connected, Γ_0 can be contracted to a point y_1 by a continuous family Γ_s, $s\in[0,1]$, of curves. More precisely, there is a continuous function $\gamma:[0,1]^2\to\mathfrak{Y}$ such that Γ_s is traced out by $\gamma(s,\cdot)$. As in the proof of 4.1, one can find a continuous family L_s, $s\in[0,1]$, of curves in $\mathfrak{X}$ such that $f(L_s)=\Gamma_s$. Now since $\Gamma_1=y_1$, it follows from the one-to-oneness of f that L_1 is a single point, say x_1. For s sufficiently near 1, L_s is in some neighborhood of x_1 which is mapped in a one-to-one manner. Since the curves Γ_s are evidently closed curves, we conclude that L_s is also a closed curve for s near 1. On the other hand L_0 is not a closed curve, and so contradiction is readily obtained.

5. *A case of non-uniqueness.* Much of the preceding discussion has dealt with the case in which f maps in a locally one-to-one manner. It is of interest to discuss the case where this is known not to occur, as when f maps a continuum of points into the same image. From some points of view this may be regarded as the "natural" behavior in the neighborhood of points x_0 for which $f'(x_0)$ (if it exists) is not an isomorphism. We present here a result concerning this case; for simplicity we consider only the case that $\mathfrak{X}$ *and* $\mathfrak{Y}$ *are* BANACH *spaces.*

First we give an example. Let $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=l_1$, the BANACH space of absolutely convergent sequences $[\xi_i]$, and let f be defined for $\|x\|=\sum|\xi_i|<1$ by the equation

$$f[\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots]\equiv[\xi_2-\tfrac{1}{4}\xi_1^2,\ldots,\xi_{n+1}-\tfrac{1}{4}\xi_n^2,\ldots].$$

It may be readily established that the derivative $f'(x)$ exists for $\|x\|<1$ and is the bounded linear transformation which sends the vector $h=[h_i]$ into

$$[h_2-\tfrac{1}{2}\xi_1h_1,\ldots,h_{n+1}-\tfrac{1}{2}\xi_nh_n,\ldots],$$

and that f is in class C' for $\|x\|<1$. In addition, $f'(x)$ maps onto $\mathfrak{Y}$ for each x with $\|x\|<1$. The reader may check that f sends the curve Γ_0 defined by

$$[t,2^{-2}t^2,\ldots,2^{2-2^n}t^{2^n-2},\ldots],\qquad |t|<1$$

into the zero vector of $\mathfrak{Y}$, and that these points are the only ones mapped into zero.

It is natural to ask whether for $y=[\eta_1,\ldots,\eta_n,\ldots]$ sufficiently small in norm, there exists a curve Γ_y which is mapped into y by f, and how Γ_y is related to Γ_0. We now present a theorem that gives some answers, although at the cost of some unwieldy hypotheses.

5.1. *Theorem. Let $\mathfrak{T}$ be a metric space and φ_0 a continuous function on $\mathfrak{T}$ to $\mathfrak{X}$ such that $\varphi(t_0)=x_0$ and $f(\varphi_0(t))=y_0$, $t\in\mathfrak{T}$. Suppose that f is in class $C'(S(x_0,1))$, and that there exists a number N such that if $\|x-x_0\|<1$ and $y\in\mathfrak{Y}$, then there is at least one $z\in\mathfrak{X}$ with $\|z\|\leq N\|y\|$ such that $f'(x|z)=y$.*

Then there are positive numbers p, q such that if $\|y_1 - y_0\| < p$, there is a continuous function φ_1 defined for dist $(t, t_0) < q$ and with values in $\mathfrak{X}$ such that $f(\varphi_1(t)) = y_1$ and $\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| < 2N\,p$, for any t with dist $(t, t_0) < q$.

Proof. The proof is based upon a result in [4]. Let $\mathfrak{X}_B$ and $\mathfrak{Y}_B$ denote the BANACH spaces of bounded continuous functions from $\mathfrak{T}$ to $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$, respectively. We define a mapping $\lambda: \mathfrak{X}_B \to \mathfrak{Y}_B$ by

$$\lambda(\varphi)[t] \equiv f'(x_0|\varphi(t)), \qquad \varphi \in \mathfrak{X}_B,$$

and we set $G: \mathfrak{X}_B \to \mathfrak{Y}_B$ equal to

$$G(\varphi)[t] \equiv f[\varphi(t) + \varphi_0(t)] - y_0$$

whenever φ is small enough so that this last function is meaningful. Note that $G(0) = 0$; let $\delta > 0$ be such that if $\|x - x_0\| < \delta$ then $\|f'(x) - f'(x_0)\| < 1/2N$, and let $q > 0$ be such that if dist $(t, t_0) < q$ then $\|\varphi_0(t) - x_0\| < \delta/2$. If $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{X}_B$ and $\|\psi_i\| < \delta/2$, the Meanvalue theorem readily enables us to conclude that

$$\|G(\psi_1)[t] - G(\psi_2)[t] - \lambda(\psi_1 - \psi_2)[t]\| \leq \frac{1}{2N}\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|.$$

By Theorem 5 of [4] we have that if $\|y_1 - y_0\| < p$, where $p = \delta/4N$, then the equation $G(\varphi) = y_1 - y_0$ has a solution $\psi \in \mathfrak{X}_B$ such that

$$\|\psi(t)\| \leq 2N\|y_1 - y_0\|.$$

Now let φ_1 be defined by $\varphi_1(t) \equiv \varphi_0(t) + \psi(t)$; we conclude that

$$f(\varphi_1(t)) = y_1, \qquad \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| < 2N\,p,$$

for any t with dist $(t, t_0) < q$.

This result permits us to conclude the existence of a solution curve φ_1 defined for t near t_0. If it happens that $\mathfrak{T}$ is compact, then by choosing y_1 sufficiently near to y_0, we can obtain a solution curve φ_1 which is defined on all of $\mathfrak{T}$.

5.2. *Theorem. Let $\mathfrak{T}$ be a compact metric space and φ_0 a continuous function on $\mathfrak{T}$ to $\mathfrak{X}$ such that $f(\varphi_0(t)) = y_0$, $t \in \mathfrak{T}$. Suppose that f is in class $C'(\mathfrak{X})$ and that the operator $f'(x)$ maps onto $\mathfrak{Y}$, for all $x \in \mathfrak{X}$. Then there exist positive numbers p_0 and K such that if $\|y_1 - y_0\| < p < p_0$, there exists a continuous function φ_1 on all of $\mathfrak{T}$ to $\mathfrak{X}$ such that*

$$f(\varphi_1(t)) = y_1, \qquad \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| < Kp, \qquad t \in \mathfrak{T}.$$

It is easy to construct a proof of this theorem from the previous one using techniques that are current in this paper and in [4]. Since it is detailed but not difficult, we do not give it here.

References.

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Monografje Matematyczne, Warsaw 1932. — [2] BANACH, S.: Über metrische Gruppen. Studia Math. **3**, 101—113 (1931). — [3] BARTLE, R. G.: Singular points of functional equations. Trans. Amer.

Math. Soc. **75**, 366—384 (1953). — [*4*] Bartle, R. G., and L. M. Graves: Mappings between function spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 400—413 (1952). — [*5*] Caccioppoli, R.: Sugli elementi uniti delle transformazioni funzionali. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **3**, 13—34 (1927). — [*6*] Ficken, F. A.: The continuation method for functional equations. Comm. on Pure a. Appl. Math. **4**, 435—456 (1951). — [*7*] Friedrichs, K. O.: Functional analysis. Institute for Math. and Mech., New York Univ., 1950.— [*8*] Graves, L. M.: Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 163—177 (1927). — [*9*] Graves, L. M.: Some mapping theorems. Duke Math. J. **17**, 111—114 (1950). — [*10*] Hildebrandt, T. H., and L. M. Graves: Implicit functions and their differentials in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 127—153 (1927). — [*11*] Hyers, D. H.: Linear topological spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 1—21 (1945). — [*12*] Lévy, P.: Sur les fonctions de ligne implicites. Bull. Soc. Math. France **48**, 13—27 (1920). — [*13*] Michal, A. D.: First order differentials of functions with arguments and values in topological abelian groups. Rev. Ciencias, Lima **47**, 389—422 (1945). — [*14*] Michal, A. D.: Higher order differentials of functions with arguments and values in topological abelian groups. Rev. Ciencias, Lima **43**, 155—176 (1941). — [*15*] Millsaps, K.: Differential calculus in topological groups. I—II. Rev. Ciencias, Lima **44**, 485—492 (1942); **45**, 45—52 (1943). — [*16*] Miranda, C.: Problemi di esistenza in analisi funzionale. Scuola Normale Superiore Pisa, Litografia Tacchi. Pisa 1949. — [*17*] Pettis, B. J.: On continuity and openness of homomorphisms in topological groups. Ann. of Math. **52**, 293—308 (1950).

Dept. of Math., Yale University, New Haven, Connecticut (U.S.A.).

(Eingegangen am 31. Januar 1955.)

Meinardus, G.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 347—351 (1955)

Über die Kroneckersche Grenzformel.

Von
Günter Meinardus.

§ 1.

Jede positiv definite binäre quadratische Form läßt sich mit einer komplexen Zahl $\tau = x + iy$, $y > 0$, bis auf einen Faktor in der Gestalt $|n + m\tau|^2$ schreiben. Ist dann

$$Z(\tau, s) = \sum_{\substack{n, m \\ n^2+m^2>0}} |n + m\tau|^{-2s}, \qquad Re(s) > 1, \tag{1}$$

die Zetafunktion dieser Form, so lautet die von Kronecker [1] entdeckte Grenzformel

$$\lim_{s \to 1} \left\{ Z(\tau, s) - \frac{\pi}{y(s-1)} \right\} = -\frac{2\pi}{y} \log \{\eta(\tau)\eta(-\bar{\tau})\} - \frac{2\pi}{y} \log y + \frac{2\pi}{y}(\gamma - \log 2), \tag{2}$$

wobei $\bar{\tau} = x - iy$, γ die Eulersche Konstante und

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}), \qquad Im(\tau) > 0, \tag{3}$$

die Dedekindsche η-Funktion ist. Für die Formel (2), die eine große algebraische sowie funktionentheoretische Bedeutung besitzt, gibt es bereits mehrere Beweise, vgl. etwa Weber [2], Lerch [3], Franel [4], Mertens [5], Landau [6], Epstein [7]. Kürzlich gab Herr Koecher [8] einen Beweis, der auf den Transformationseigenschaften der Funktion $\eta(\tau)$ bei Anwendung von Modulsubstitutionen beruht, d.h. im wesentlichen auf der Beziehung

$$\sqrt{-i\tau}\, \eta(\tau) = \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right). \tag{4}$$

Es geht daraus hervor, daß sich im Prinzip jeder Beweis von (4) zu einem Beweis von (2) umgestalten läßt.

Von dieser Überlegung ausgehend soll hier ein neuer Beweis von (2) gegeben werden, der nur die beiden Formeln

$$\pi \operatorname{ctg} \pi w = \frac{1}{w} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w+m} + \frac{1}{w-m} \right), \qquad w \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{5}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |w + iy|^{-2s} dw = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} y^{1-2s}, \quad y > 0, \qquad Re(s) > \frac{1}{2}, \tag{6}$$

benutzt. Der nach der obigen Bemerkung zugeordnete Beweis von (4) wurde mir vor einiger Zeit von Herrn Prof. SIEGEL[1]) mündlich mitgeteilt.

Die Formel (2) soll hier in der Gestalt

$$(7)\qquad \lim_{s\to 1}\left\{Z(\tau,s)-\frac{2\sqrt{\pi}\,y^{-2s+1}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})\,\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)}\right\}=-\frac{2\pi}{y}\log\{\eta(\tau)\,\eta(-\bar{\tau})\}$$

bewiesen werden. Die Äquivalenz von (2) und (7) erkennt man aus den Relationen

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma;\qquad \Gamma'(1)=-\gamma;\qquad \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\pi}(\gamma+2\log 2).$$

§ 2.

1. Es sei s reell und größer als 1. Weiter bedeuten α und β zwei feste reelle Zahlen mit $0<\alpha<1$, $0<\beta<\frac{y}{2}$ und N eine natürliche Zahl. Unter $\mathfrak{W}_N$ verstehen wir den geschlossenen Integrationsweg, der die Punkte $N+\frac{1}{2}+i\beta$, $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$, $N+\frac{1}{2}-i\beta$ und $N+\frac{1}{2}+i\beta$ jeweils geradlinig in der angegebenen Reihenfolge verbindet. Ist m ganz-rational, so folgt auf Grund von (5) nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{W}_N}\{(w+m\tau)\,(w+m\bar{\tau})\}^{-s}\operatorname{ctg}\pi w\,dw=2\sum_{n=1}^{N}|n+m\tau|^{-2s}.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von

$$(8)\qquad h(w,\tau,s)=\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{+\infty}\{(w+m\tau)\,(w+m\bar{\tau})\}^{-s}$$

auf dem Integrationsweg für $s>\frac{1}{2}$ in w erhält man durch Summation

$$2\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 1}}^{+\infty}|n+m\tau|^{-2s}=\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{W}_N}h(w,\tau,s)\operatorname{ctg}\pi w\,dw.$$

Nach (1) ergibt sich

$$(9)\qquad Z(\tau,s)=2\zeta(2s)\,(1+|\tau|^{-2s})+\frac{1}{i}\lim_{N\to\infty}\int_{\mathfrak{W}_N}h(w,\tau,s)\operatorname{ctg}\pi w\,dw.$$

Wir setzen $\mathfrak{W}_N=\mathfrak{W}_{1,N}+\mathfrak{W}_{2,N}$, wobei $\mathfrak{W}_{1,N}$ das oberhalb und $\mathfrak{W}_{2,N}$ das unterhalb der reellen Achse verlaufende Teilstück von $\mathfrak{W}_N$ bedeute. Nach dem CAUCHYschen Satz ist

$$-\int_{\mathfrak{W}_{1,N}}h(w,\tau,s)\,dw+\int_{\mathfrak{W}_{2,N}}h(w,\tau,s)\,dw=\int_{-(N+\frac{1}{2})}^{-\alpha}h(-w,\tau,s)\,dw+\int_{\alpha}^{N+\frac{1}{2}}h(w,\tau,s)\,dw$$
$$=\int_{-(N+\frac{1}{2})}^{N+\frac{1}{2}}h(w,\tau,s)\,dw-\int_{-\alpha}^{+\alpha}h(w,\tau,s)\,dw,$$

[1]) Vgl. SIEGEL, C. L.: A simple proof of $\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\eta(\tau)\sqrt{\frac{\tau}{i}}$. Mathematika **1**, Nr. 4, 4 (1954).

denn es ist $h(-w, \tau, s) = h(w, \tau, s)$. Nach (6) gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(w, \tau, s)\, dw = \frac{2\sqrt{\pi}\, y^{-2s+1}\, \Gamma(s-\frac{1}{2})\, \zeta(2s-1)}{\Gamma(s)}.$$

Setzen wir noch

$$K(\tau, s) = Z(\tau, s) - \frac{2\sqrt{\pi}\, y^{-2s+1}\, \Gamma(s-\frac{1}{2})\, \zeta(2s-1)}{\Gamma(s)}, \tag{10}$$

so ergibt sich mit (9) die Beziehung

$$\left\{\begin{aligned} K(\tau, s) &= 2\zeta(2s)\,(1+|\tau|^{-2s}) - \int_{-\alpha}^{+\alpha} h(w, \tau, s)\, dw + \\ &+ \frac{1}{i} \lim_{N\to\infty} \Big\{ \int_{\mathfrak{W}_{1,N}} h(w, \tau, s)\,(\operatorname{ctg} \pi w + i)\, dw + \int_{\mathfrak{W}_{2,N}} h(w, \tau, s)\,(\operatorname{ctg} \pi w - i)\, dw \Big\}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

2. Die Konvergenz des letzten Ausdruckes ist gleichmäßig in s, wie man den vorstehenden Betrachtungen entnimmt, falls s in einer hinreichend kleinen Umgebung von $s=1$ angenommen wird. Aus (11) erhalten wir demnach

$$\left\{\begin{aligned} K(\tau, 1) &= \frac{\pi^2}{3}\,(1+|\tau|^{-2}) - \int_{-\alpha}^{+\alpha} h(w, \tau, 1)\, dw + \\ &+ \frac{1}{i} \lim \Big\{ \int_{\mathfrak{W}_{1,N}} h(w, \tau, 1)\,(\operatorname{ctg} \pi w + i)\, dw + \int_{\mathfrak{W}_{2,N}} h(w, \tau, 1)\,(\operatorname{ctg} \pi w - i)\, dw \Big\}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Man prüft leicht, daß

$$h(w, \tau, 1) = g(w, \tau) + g(w, -\bar{\tau}) \tag{13}$$

ist, mit

$$g(w, \tau) = \frac{2\tau}{\tau - \bar{\tau}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 - m^2\tau^2}. \tag{14}$$

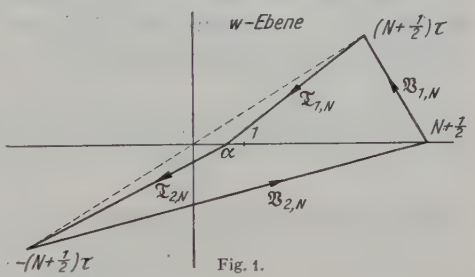


Fig. 1.

Diese Funktion ist bei festem $y>0$ in der ganzen w-Ebene regulär bis auf die Stellen $w = m\tau$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dort liegen Pole erster Ordnung vor mit den Residuen $\frac{1}{(\tau-\bar{\tau})\, m}$. Nach (5) läßt sich $g(w, \tau)$ im wesentlichen durch die Funktion $\operatorname{ctg} \frac{\pi w}{\tau}$ darstellen, was wir hier nicht verwenden. Es wird nun

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{i} \int_{\mathfrak{W}_{1,N}} h(w, \tau, 1)\,(\operatorname{ctg} \pi w + i)\, dw + \frac{1}{i} \int_{\mathfrak{W}_{2,N}} h(w, \tau, 1)\,(\operatorname{ctg} \pi w - i)\, dw \\ &\qquad = H_N(\tau) + H_N(-\bar{\tau}), \end{aligned}\right. \tag{15}$$

mit

$$H_N(\tau) = \frac{1}{i} \int_{\mathfrak{W}_{1,N}} g(w, \tau)\,(\operatorname{ctg} \pi w + i)\, dw + \frac{1}{i} \int_{\mathfrak{W}_{2,N}} g(w, \tau)\,(\operatorname{ctg} \pi w - i)\, dw. \tag{16}$$

Es seien $\mathfrak{V}_{1,N}$, $\mathfrak{V}_{2,N}$, $\mathfrak{T}_{1,N}$ und $\mathfrak{T}_{2,N}$ die in der Zeichnung angegebenen geradlinigen Integrationswege. Ersetzen wir in (16) die Wege $\mathfrak{W}_{1,N}$ bzw. $\mathfrak{W}_{2,N}$ durch $\mathfrak{V}_{1,N} + \mathfrak{T}_{1,N}$ bzw. $\mathfrak{T}_{2,N} + \mathfrak{V}_{2,N}$, so ändert sich nach dem CAUCHYschen

Integralsatz der Wert von $H_N(\tau)$ nicht. Auf $\mathfrak{B}_{1,N}$ ist $w=(N+\frac{1}{2})\left(1+t(\tau-1)\right)$ zu setzen, wo der Parameter t von 0 bis 1 läuft. Nehmen wir $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{N}}$ an, so ist für $0\leq t\leq\varepsilon$ offenbar $|\operatorname{ctg}\pi w+i|$ beschränkt. Für $\varepsilon\leq t\leq 1$ gilt aber

$$|\operatorname{ctg}\pi w+i|=\left|\frac{2i\,e^{2\pi i w}}{e^{2\pi i w}-1}\right|\leq c_1\,e^{-2\pi\varepsilon y(N+\frac{1}{2})},$$

wo c_1 eine von w und N unabhängige positive Konstante ist. Da $g(w,\tau)$ auf $\mathfrak{B}_{1,N}$ beschränkt bleibt, erhält man

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathfrak{B}_{1,N}} g(w,\tau)\,(\operatorname{ctg}\pi w+i)\,dw=0. \tag{17}$$

Analog folgt

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathfrak{B}_{2,N}} g(w,\tau)\,(\operatorname{ctg}\pi w-i)\,dw=0. \tag{18}$$

Weiter ist

$$\int_{\mathfrak{T}_{1,N}} g(w,\tau)\,dw-\int_{\mathfrak{T}_{2,N}} g(w,\tau)\,dw=\int_{-\alpha}^{(N+\frac{1}{2})\tau} g(w,\tau)\,dw+\int_{(N+\frac{1}{2})\tau}^{+\alpha} g(w,\tau)\,dw.$$

Die Integrale werden dabei geradlinig erstreckt. Fügen wir noch das Intervall von $+\alpha$ bis $-\alpha$ zum Integrationsweg hinzu, so erhalten wir nach dem Residuensatz die Summe der Residuen von $g(w,\tau)$ auf der Strecke von 0 bis $(N+\frac{1}{2})\tau$, multipliziert mit $-2\pi i$, d.h.

$$\int_{\mathfrak{T}_{1,N}} g(w,\tau)\,dw-\int_{\mathfrak{T}_{2,N}} g(w,\tau)\,dw=\int_{-\alpha}^{+\alpha} g(w,\tau)\,dw-\frac{2\pi i}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}. \tag{19}$$

Endlich muß noch das Integral

$$\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{T}_{1,N}+\mathfrak{T}_{2,N}} g(w,\tau)\operatorname{ctg}\pi w\,dw$$

berechnet werden. Der Integrand stellt eine ungerade Funktion dar. Für den doppelten Wert des Integrales erhalten wir also das Integral über einen geschlossenen Integrationsweg, der die Verbindungsstrecke von $-(N+\frac{1}{2})\tau$ und $(N+\frac{1}{2})\tau$ in negativem Sinne umschließt. Der Residuensatz ergibt

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{T}_{1,N}+\mathfrak{T}_{2,N}} g(w,\tau)\operatorname{ctg}\pi w\,dw&=\frac{-2\pi}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\operatorname{ctg}\pi m\tau-g(0,\tau)\\&=\frac{2\pi}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{i}{m}\left(1+\frac{2}{e^{-2\pi i m\tau}-1}\right)+\frac{\pi^2}{3\tau(\tau-\bar{\tau})}\\&=\frac{2\pi i}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}+\frac{4\pi i}{\tau-\bar{\tau}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m(e^{-2\pi i m\tau}-1)}+\frac{\pi^2}{3\tau(\tau-\bar{\tau})},\end{aligned}$$

wobei Gl. (14) benutzt wurde. Fassen wir die letzte Beziehung mit den Formeln (16) bis (19) zusammen, so erhalten wir

$$\lim_{N\to\infty} H_N(\tau) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} g(w,\tau)\,dw + \frac{4\pi i}{\tau-\bar{\tau}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(e^{-2\pi i m\tau}-1)} + \frac{\pi^2}{3\tau(\tau-\bar{\tau})}. \tag{20}$$

Nach Gl. (3) ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(e^{-2\pi i m\tau}-1)} = -\log\eta(\tau) + \frac{\pi i\tau}{12}, \tag{21}$$

so daß die Gln. (12), (13), (15), (16), (20) und (21) die Aussage

$$K(\tau,1) = -\frac{2\pi}{y}\log\{\eta(\tau)\,\eta(-\bar{\tau})\} \tag{22}$$

liefern. Nach (10) und (11) ist durch (22) die Formel (7) bewiesen.

Literatur.

[1] Kronecker, L.: Zur Theorie der elliptischen Funktionen. Sitzgsber. kgl. preuß. Akad. Wiss. Berlin **1885**, 775 u. **1889**, 135. — [2] Weber, H.: Komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. Math. Ann. **33**, 390—410 (1889). — [3] Lerch, M.: Sur un théorème de Kronecker. Bull. Soc. Bohême, 2. Kl. **1893**, Nr. 9, 1—17. — [4] Franel, J.: Sur une formule fondamentale de Kronecker. Math. Ann. **48**, 595—602 (1897). — [5] Mertens, F.: Über einen asymptotischen Ausdruck. Sitzgsber. ksl. Akad. Wiss. Wien, Abt. 2a **106**, 411—421 (1898). — [6] Landau, E.: Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale. J. reine angew. Math. **125**, 64—188 (1902). — [7] Epstein, P.: Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. Math. Ann. **56**, 615—644 (1903). — [8] Koecher, M.: Ein neuer Beweis der Kroneckerschen Grenzformel. Arch. Math. **4**, 316—321 (1953).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 26. Februar 1955.)

EWEIDA, M. T.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 352—353 (1955)

On Newton's series of interpolation.

By
M. T. EWEIDA.

The series

$$(1)\qquad \begin{cases} f(a_1)+(z-a_1)\,f(a_1,a_2)+(z-a_1)(z-a_2)\,f(a_1,a_2,a_3)+\cdots \\ \qquad +(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)\,f(a_1,a_2,\ldots,a_{n+1})+\cdots \end{cases}$$

where $f(a_1,a_2), f(a_1,a_2,a_3),\ldots$ are the divided differences of $f(z)$ ([3] pp. 20–24), is known as Newton's series of interpolation associated with $f(z)$ and $\{a_n\}$. The convergence properties of this series have been studied extensively by many authors ([1] pp. 15–26; [2] pp. 49–64; [4] pp. 52–55). The object of this paper is to establish a convergence property of (1) if $\sum_{i=1}^{n}|a_i|=o(n)$. We prove the

Theorem. *If*

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{(i)} & \overline{\operatorname{fin}}_n\,|a_n| = A<\infty, \\ \text{(ii)} & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i|=0, \\ \text{(iii)} & f(z)\ \textit{is regular in}\ |z|<R \quad (R>A), \end{cases}$$

then the series (1) *converges uniformly to* $f(z)$ *in* $|z|\leq R_1<R$.

Proof. Let $A<R_1<R_2<R$, and $p_n(z)$ the n-th partial sum of (1) which interpolates to $f(z)$ in $a_1, a_2, \ldots, a_n$. According to Hermite's interpolation formula ([2] p. 50) we have

$$f(z)-p_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_2}\frac{\omega(z)\,f(t)}{\omega(t)\,(t-z)}\,dt \qquad (|z|\leq R_1)$$

where $\omega(t)=(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n)$.

Therefore with a constant M

$$|f(z)-p_n(z)|\leq M\,\frac{\max\limits_{|z|\leq R_1}|\omega(z)|}{\min\limits_{|t|=R_2}|\omega(t)|}.$$

To estimate this, we have on one hand

$$|\omega(z)|\leq R_1^n\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{|a_i|}{R_1}\right)<R_1^n\cdot e^{\frac{1}{R_1}\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_i|} \qquad (|z|\leq R_1);$$

on the other hand $|a_i|/R_2\leq 1-\delta$ $(\delta>0)$ yields

$$|\omega(t)|\geq R_2^n\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{|a_i|}{R_2}\right)\geq R_2^n\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{|a_i|}{\delta R_2}\right)\right\}^{-1} \qquad (|t|=R_2).$$

It follows that

$$|f(z)-p_n(z)| \leq M \cdot R_1^n e^{\frac{1}{R_1}\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_i|} \cdot R_2^{-n} e^{\frac{1}{\delta R_2}\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_i|} < M\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n e^{\varepsilon_n n}$$

where $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$. This implies $|f(z)-p_n(z)| = o(1)$ $(n \to \infty)$, and the proof is complete.

Corollary[1]. If $a_n \to 0$ as $n \to \infty$, the theorem is applicable since (2) will be fulfilled.

Example 1[2]. We show that if the radius of regularity of $f(z)$ is equal to A and (2) is satisfied, the theorem is no more true.

Choose $a_1 = 1$, $a_n = 0$ $(n > 1)$, so that (2) holds and $A = 1$. Take $f(z) = \frac{1}{1-z}$, where the radius of regularity is one. Now $f(1) = \infty$, so that (1) is not defined for any z.

Example 2. We show that if (ii) is not satisfied and the radius of regularity of $f(z)$ is greater than A, the theorem may be false.

Choose $a_{2k+1} = 2$, $a_{2k+2} = 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$, so that $\frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}{n} \to \frac{3}{2}$ as $n \to \infty$. Consider $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$ whose radius of regularity is $3 > A\,(A = 2)$. If $2 < R < 3$ and n even then

$$\max_{|z|=R}|f(2, 1, 2, \ldots, 2)\cdot(z-2)^{n/2}\cdot(z-1)^{n/2}| > \frac{(R+1)^{n/2}\cdot(R+2)^{n/2}}{3^n},$$

and (1) cannot converge uniformly to $f(z)$ in $|z| \leq R$.

I wish to thank the referee for his valuable comments and suggestions.

References.

[1] Gontcharoff, W.: Détermination des fonctions entières par interpolation. Paris 1937. — [2] Walsh, J. L.: Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York 1935. — [3] Whittaker, E. T., and G. Robinson: The calculus of observations. London 1924. — [4] Whittaker, J. M.: Interpolatory function theory. Cambridge 1935.

[1]) This result follows also from a theorem due to Walsh ([2] p. 61).

[2]) See [2], p. 52.

Department of Mathematics, College of Arts and Sciences, Baghdad (Iraq).

(Eingegangen am 5. März 1955.)

Salzmann, H., u. K. Zeller
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 354—367 (1955)

Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen.

Von
Helmut Salzmann und Karl Zeller.

§ 1. Einleitung.

Wir betrachten Funktionen f, die in dem abgeschlossenen Intervall $I = [0, 1]$ erklärt sind und dort endliche Ableitungen jeder Ordnung besitzen. Den Raum dieser Funktionen bezeichnen wir mit C^∞. Für $f \in C^\infty$ und $x \in I$ kann man die Taylor-Entwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} h^k f^{(k)}(x)/k!$ bilden. Wird f in einer Umgebung von x durch die Taylor-Entwicklung dargestellt (ist also f dort regulär-analytisch), so heißt x ein Entwicklungspunkt oder regulärer Punkt von f, andernfalls singulär. Die Singularität wird entweder hervorgerufen durch Divergenz der Entwicklung (Konvergenzradius Null, Divergenzpunkt von f) oder durch Konvergenz der Entwicklung zum falschen Wert (Fehlkonvergenzpunkt von f).

Es ist seit langem bekannt, daß eine Funktion aus C^∞ singuläre Punkte haben kann (Cauchy [1823], Du Bois Reymond [1876], Pringsheim [1893]) und daß sie sogar nirgends regulär sein kann (Du Bois Reymond [1876], Mittag-Leffler (Fredholm) [1891], Pringsheim [1893]; vgl. § 5). Wir untersuchen in § 2 die hierbei verwendeten Methoden, wobei wir auch die Theorie der linearen Räume heranziehen, und geben zwei einfache Beispiele nirgends regulärer Funktionen [(1) und (4)].

Die Kenntnis verschiedener Methoden ist wichtig für den Fall, daß man Funktionen mit vorgeschriebenen Singularitäten gewissen Unterklassen von C^∞ entnehmen will, die z. B. durch Ungleichungen für die Ableitungen definiert sind (vgl. etwa Mandelbrojt [1942]), oder wenn man Funktionen mehrerer Veränderlicher betrachtet.

In § 3, dem Hauptteil der Arbeit, behandeln wir die Frage nach der Struktur der Mengen der regulären Punkte, der Divergenz- und Fehlkonvergenzpunkte. Eine abschließende Antwort ist schon 1940 von Zahorski [1946, 1947] gefunden worden (Satz 1), jedoch ist unser Beweis wesentlich einfacher.

§ 4 bringt Bemerkungen über verwandte Beweismethoden und Ergebnisse, § 5 einige geschichtliche Angaben.

Herrn H. Kneser danken wir für wertvolle Ratschläge.

§ 2. Erzeugung von Singularitäten.

Will man eine Funktion $s \in C^\infty$ mit singulären Punkten konstruieren, so hat man mehrere Alternativen: Singularität in einem Punkte a kann durch

Divergenz oder Fehlkonvergenz erzeugt werden; Singularität in allen Punkten kann man direkt oder auf dem Wege über eine dichte Punktmenge herstellen (ist s beispielsweise in den rationalen Punkten singulär, so sogar in allen Punkten). Die dabei vorkommende „Kondensation von Singularitäten" läßt sich auf „klassischem" oder funktionalanalytischem Wege bewerkstelligen. Schließlich bestehen noch die Möglichkeiten, nur im Reellen zu arbeiten oder komplexe Funktionentheorie heranzuziehen.

Die funktionalanalytische Methode — hier zuerst von MORGENSTERN [1954] eingeführt — beruht darauf, daß C^∞ mit den Halbnormen

$$\|f\|_k = \max_{x \in I} |f^{(k)}(x)| \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

ein (lokalkonvexer) F-Raum ist (wobei die linearen Verknüpfungen in natürlicher Weise erklärt werden). Konvergenz einer Folge f_n im Sinne dieser Topologie ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz jeder abgeleiteten Folge $f_n^{(k)}(x)$ ($k = 0, 1, \ldots$; fest). Wir sprechen kurz von Konvergenz in C^∞. Wesentlich ist die Vollständigkeit von C^∞ (im Sinne dieser Topologie), so daß jede CAUCHY-Folge ein Grenzelement im Raum besitzt. Die Mengen $U(\varepsilon, n)$ ($\varepsilon > 0$, n natürlich) der $f \in C^\infty$ mit

$$|f(x)|, \ldots, |f^{(n)}(x)| < \varepsilon \qquad (x \in I)$$

bilden eine Basis von Umgebungen des Nullpunktes. Durch Translation erhält man die Umgebungen der anderen Punkte.

Eine wichtige Rolle spielen noch die Ausdrücke

$$M_n(f, x) = \max_{0 \le k \le n} \sqrt[k+2]{\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!}}.$$

Wir nehmen hierbei die $(k+2)$-te Wurzel, weil dann eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mit $M_n(f_n, x) < \frac{1}{n+1}$ in C^∞ konvergiert, da $|f_n^{(k)}(x)| < k!\,(n+1)^{-k-2}$ für $k = 0, \ldots, n$. Für die Abbildung $x \to M_n(f, x)$ schreiben wir $M_n(f)$.

Bei festem f und x wächst $M_n(f, x)$ monoton. $\sup_n M_n(f, x) < \infty$ ist gleichbedeutend damit, daß die TAYLOR-Entwicklung von f in x einen positiven Konvergenzradius hat. $M_n(f)$ ist in I stetig, M_n ist in C^∞ stetig und genügt der Dreiecksungleichung

$$M_n(f + g) \le M_n(f) + M_n(g).$$

Die Tatsache, daß ein $a \in I$ Divergenzpunkt einer Funktion $s \in C^\infty$ sein kann, beruht nun darauf, daß es in jedem $U(\varepsilon, n)$ ein g gibt, für das mindestens eine Ableitung in a „groß" ist (vgl. die unten benützten Funktionen $\text{const} \cdot \cos bx$, auch kann man analytische Funktionen nehmen, die in der komplexen Ebene in der Nähe von a eine Singularität haben). Damit sind die $M_n(f, a)$ in keiner offenen Menge $\neq \emptyset$ von C^∞ gleichmäßig beschränkt; die Mengen der f mit $M_n(f, a) \le M$ sind abgeschlossen und nirgends dicht in C^∞, nach dem Kategorieprinzip (BANACH [1932]) gilt $\sup_n M_n(f, a) = \infty$ in einer fetten Menge von C^∞ (magere Menge = Menge I. Kategorie, fette

Menge = Komplement einer mageren Menge). Jedes s dieser fetten Menge hat die gewünschte Eigenschaft. Man kann ein solches s auch leicht in Form einer Reihe darstellen, s. z.B. PRINGSHEIM [1893]. Nach dem Kategorieprinzip erhält man nun sofort ein $s \in C^\infty$, für das jedes rationale x Divergenzpunkt ist. Ein solches s, das also überall singulär ist, kann auch nach der Methode des gleitenden Buckels konstruiert werden (vgl. ZELLER [1953], S. 299). Die beiden Schritte „Singularität in einem Punkt", „Kondensation" lassen sich zu einem vereinigen (CARTAN [1940], MANDELBROJT [1942]).

Ohne den Umweg über die rationalen Punkte erhält man ein überall singuläres s, bei dem sogar jedes x Divergenzpunkt ist, in der Form

$$s(x) = \sum u_n(x) = \sum a_n \cos b_n x. \tag{1}$$

Dazu bestimmen wir die u_n induktiv mit geeignetem Anfangselement. Sind $u_0, \ldots, u_{n-1}$ schon so festgesetzt, daß

$$M_{2k}(u_0 + \cdots + u_{n-1}, x) > k \qquad (x \in I, k = 0, \ldots, n-1) \tag{2}$$

gilt, so wählen wir u_n so, daß

$$M_{2k}(u_0 + \cdots + u_n, x) > k \qquad (x \in I, k = 0, \ldots, n) \tag{3}$$

ist. Dies erreichen wir mit einem u_n, bei dem $M_{2n-2}(u_n)$ so klein ist, daß die n Ungleichungen (2) beim Übergang zu (3) erhalten bleiben, und bei dem $M_{2n}(u_n)$ so groß ist, daß auch die letzte Ungleichung in (3) erfüllt ist, etwa

$$M_{2n}(u_n) > n + M_{2n}(u_0 + \cdots + u_{n-1});$$

man verwende die Dreiecksungleichung. Zusätzlich können wir dabei noch die Konvergenzbedingung $M_n(u_n) < \frac{1}{n+1}$ erfüllen. Daß dies alles mit einem $u_n = u$ der Form $a \cos bx$ $(0 < a < 1 < b)$ zu erreichen ist, erkennen wir durch Betrachtung der Ableitungen der Funktion:

$$u^{(k)}(x) = \pm a b^k \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} bx, \quad \text{also} \quad |u^{(k)}(x)| \leq a b^k.$$

In jedem Punkt x ist dabei entweder die $(2n-1)$-te oder $(2n)$-te Ableitung dem Betrage nach $\geq \frac{1}{\sqrt{2}} a b^{2n-1}$. Wir wählen nun b so, daß der Größensprung von der $(2n-2)$-ten zur $(2n-1)$-ten Ableitung genügend groß ist und bewirken mit dem Faktor a, daß u_n bis zur $(2n-2)$-ten Ableitung klein ist. Wir sehen nun, daß $s = \sum u_n$ in C^∞ konvergiert und daß

$$M_{2k}(s, x) \geq k \qquad (x \in I, \ k = 0, 1, \ldots)$$

gilt, womit die gewünschten Eigenschaften nachgewiesen sind.

Statt des konstruktiven Vorgehens kann man auch das Kategorieprinzip verwenden, s. MORGENSTERN [1954] (dort erschweren aber zwei Druckfehler das Verständnis des Beweises). Genauer ergibt sich dabei, daß die Menge der gesuchten Funktionen fett ist.

Wir betrachten nun Beispiele mit Fehlkonvergenz der TAYLOR-Reihe. Am bekanntesten sind die CAUCHYschen Exponentialfunktionen, z. B.

$$\operatorname{cau}(x; a, b) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(b-a)^2}{(x-a)(b-x)}\right) & (a < x < b) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Exponent entsteht hierbei aus $-\frac{1}{x(1-x)}$ durch die lineare Transformation, die 0 in a und 1 in b überführt, so daß also $\operatorname{cau}(x; a, b)$ als affines Bild von $\operatorname{cau} x = \operatorname{cau}(x; 0, 1)$ erscheint, wodurch unten die Abschätzung der höheren Ableitungen erleichtert wird. Unsere Funktion hat zwei Fehlkonvergenzpunkte in a und b, wo alle Ableitungen verschwinden; sonst ist sie regulär.

Vom allgemeinen Standpunkt aus sind Divergenz und Fehlkonvergenz der TAYLOR-Entwicklung zwei ganz verschiedene Erscheinungen. Tritt Fehlkonvergenz im Punkt a auf, so bedeutet das, daß die Funktionale $\varphi_n(f) = f^{(n)}(a)$ keine totale Menge bilden, d. h. daß es ein $f \neq 0$ in C^∞ mit $\varphi_n(f) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ gibt. Eine ausführlichere Deutung ist mit Hilfe des dualen Raumes zu C^∞ möglich. Wir verzichten darauf, weil wir dabei mit komplizierteren Topologien arbeiten müßten. — Weiter ist zu beachten, daß die Menge der f mit Fehlkonvergenz in a eine magere Menge in C^∞ bildet, was verschiedene Untersuchungen erschwert. Trotzdem kann man Fehlkonvergenz in a ähnlich wie Divergenz in a (s. oben) herstellen, wenn man beachtet, daß es in jedem $U(\varepsilon, n)$ ein u mit vorgeschriebenem $u^{(n+1)}(a)$ gibt. Dies gestattet eine C^∞-konvergente Reihe $s = \sum u_n$ aufzustellen, bei der man durch geeignete induktive Wahl der u_n dafür sorgt, daß alle Ableitungen von s in a klein sind (im Vergleich zum Verlauf von s bei a) und damit Fehlkonvergenz erzeugt; s. etwa PRINGSHEIM [1893, 1894]. Diese Konstruktion gestattet, Fehlkonvergenz auch bei Funktionen aus gewissen Untermengen von C^∞ (vgl. oben) zu erhalten, und damit auch die späteren, $\operatorname{cau}(x)$ verwendenden Untersuchungen auf diese Klassen auszudehnen.

Auch die Kondensation CAUCHYscher Singularitäten ist möglich. Die Funktion

$$s(x) = \sum a_n \operatorname{cau}(x; p_n, r_n) \tag{4}$$

hat jedes rationale x als Fehlkonvergenzpunkt (und ist damit überall singulär), wenn wir folgende Festsetzungen treffen: $r_0, r_1, \ldots$ durchläuft die rationalen Punkte des Inneren von I und $p_n < r_n$ ist ein irrationaler Punkt derart, daß im Intervall $[p_n, r_n]$ kein r_k mit $k < n$ liegt. Die $a_n > 0$ sind so klein, daß die Reihe in C^∞ konvergiert. (Ordnen wir z. B. die r_n nach wachsendem Nenner, so ist $|r_n - r_k| \geqq \frac{1}{(n+1)^2}$ für $k < n$, und mit $r_n - \frac{1}{(n+1)^2} < p_n < r_n - \frac{1}{2(n+1)^2}$ sind wegen $\|\operatorname{cau}(x; p_n, r_n)\|_k = (r_n - p_n)^{-k} \|\operatorname{cau} x\|_k$ mit $a_n = 2^{-n}$ unsere Forderungen erfüllt.) $s(x)$ hat in r_n einen Fehlkonvergenzpunkt; denn $\sum_{k=0}^{n-1}$ ist

dort regulär, wogegen alle Ableitungen des bei r_n nicht identisch verschwindenden Restes $\sum_{k=n}^{\infty}$ in r_n verschwinden.

Wir deuten zwei weitere Möglichkeiten zur Erzeugung von Singularitäten an. Es gibt unendlich viele in $0<x<1$ reguläre Funktionen mit vorgeschriebenen Randableitungen $f^{(n)}(0), f^{(n)}(1)$ (s. BESIKOWITSCH [1924], EIDELHEIT [1938], PÓLYA [1938/39], MEYER-KÖNIG-ZELLER [1954]). Leichte Zusatzüberlegungen gestatten die Erzeugung von Divergenz- und Fehlkonvergenzpunkten im Inneren von I. — Läßt man komplexwertige Funktionen zu, so erhält man ein überall singuläres s als Randwert einer geeigneten nicht fortsetzbaren Funktion (MITTAG-LEFFLER [1891]).

§ 3. Der Satz von ZAHORSKI.

Der folgende Satz gibt eine genaue Charakterisierung der bei Funktionen aus C^∞ auftretenden Singularitätenmengen. Er wurde von ZAHORSKI im Jahre 1940 gefunden und später veröffentlicht ([1946, 1947]). Wir bringen hier einen Beweis, der — vor allem für den zweiten Teil des Satzes — wesentlich einfacher als der von ZAHORSKI ist. Auch BANG [1949] hat einen einfacheren Beweisweg vorgeschlagen; bis jetzt stand uns von dieser Arbeit jedoch nur ein Referat zur Verfügung.

Satz 1 (ZAHORSKI). *Für eine Zerlegung von I in drei paarweise disjunkte Teilmengen D, E, F sind folgende Eigenschaften gleichbedeutend:*

(I) *Es gibt ein $s\in C^\infty$, so daß E die Menge der regulären Punkte von s ist, D die Menge der Divergenzpunkte und F die Menge der Fehlkonvergenzpunkte.*

(II) *E ist offen, F eine magere F_σ-Menge, D das Komplement von $E\cup F$, also eine G_δ-Menge.*

Beweis. Aus (I) folgt (II). $E\cup F$ ist die Menge der x mit $\sup_n M_n(s,x)<\infty$, also eine F_σ-Menge. E ist offen. Daher ist $F=(E\cup F)-E$ eine F_σ-Menge (Subtraktion einer offenen Menge entspricht Durchschnittsbildung mit einer abgeschlossenen). Wir müssen noch zeigen, daß F mager ist. Wäre F nicht mager, so würde F als F_σ-Menge ein volles Intervall[1]) I_1 enthalten. Dies ist jedoch nicht möglich; denn es gilt der folgende Hilfssatz, der zuerst von BOAS [1935] aufgestellt wurde:

Hilfssatz 2. *Ist $\sup_n M_n(f,x)<\infty$ für $x\in I_1$, so ist $M_n(f,x)$ gleichmäßig beschränkt in einem Teilintervall $I_2\subset I_1$ und f regulär im Inneren von I_2.*

Beweis. Der erste Teil des Hilfssatzes folgt nach der üblichen Kategoriemethode (vgl. etwa BANACH [1932], S. 14). Der zweite Teil folgt leicht aus der TAYLOR-Entwicklung mit LAGRANGEschem Restglied:

$$f(x+h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k+\frac{f^{(n)}(x+\vartheta h)}{n!}h^n\qquad(0<\vartheta<1),$$

[1]) Ein *Intervall* soll immer innere Punkte enthalten.

da ja $\frac{|f^{(n)}(y)|}{n!} < K^{n+2}$ für $y \in I_2$, so daß das Restglied gegen Null geht, wenn x im Inneren von I_2 und h genügend klein ist.

Aus (II) folgt (I). Wir konstruieren zunächst ein $t \in C^\infty$, das D als Menge der Divergenzpunkte hat. Dabei verwenden wir eine Methode, die bei F_σ-Konvergenzmengen zuerst von HERZOG-PIRANIAN [1949] angewandt wurde. D ist Durchschnitt einer absteigenden Folge offener Mengen. Indem wir jede dieser Mengen als Summe offener Intervalle darstellen und jedes der offenen Intervalle als Vereinigung abgeschlossener, von denen je zwei höchstens einen Randpunkt gemeinsam haben, erhalten wir nach Anordnung der abgeschlossenen Intervalle zu einer Folge B_n eine Darstellung von D in der Form:

Ein Punkt x gehört genau dann zu D, wenn er unendlich vielen B_n angehört.

Die Intervalle B_n vergrößern wir vorsichtig zu Intervallen A_n, die B_n im Inneren enthalten und ebenfalls die genannte Darstellungseigenschaft haben. Nun erhalten wir die gesuchte Funktion t in der Form

$$t(x) = \sum u_n(x),$$

wobei die u_n nach der folgenden Vorschrift induktiv bestimmt werden unter den Zusatzbedingungen:

$$u_n(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \text{ außerhalb } A_n$$

$$M_n(u_n, x) < \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } x.$$

Die Induktionsvorschrift lautet: Sind $u_0, \ldots, u_{n-1}$ so bestimmt, daß

$$M_{2k}(u_0 + \cdots + u_{n-1}, x) > k \qquad (x \in B_k,\ k = 0, \ldots, n-1)$$

gilt, so wählen wir u_n so, daß

$$M_{2k}(u_0 + \cdots + u_n, x) > k \qquad (x \in B_k,\ k = 0, \ldots, n)$$

ist. Dazu bestimmen wir u_n derart, daß $M_{2n-2}(u_n, x)$ für alle x so klein ist, daß die vorausgesetzten Ungleichungen durch das Hinzutreten von u_n nicht zerstört werden, und derart, daß $M_{2n}(u_n, x)$ so groß ist, daß auch die letzte Ungleichung erfüllt ist. Das geeignete u_n erhalten wir mit

Hilfssatz 3. *A und B seien abgeschlossene Teilintervalle von I und B sei im Inneren von A enthalten. Eine natürliche Zahl m und ein $\varepsilon > 0$ seien gegeben. Dann existiert eine Funktion $u \in C^\infty$ mit den Eigenschaften:*

$$u(x) = 0 \qquad (x \text{ außerhalb } A),$$

$$M_m(u, x) < \varepsilon \qquad (x \in I),$$

$$M_{m+2}(u, x) > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (x \in B).$$

Beweis. Durch Integration und Zusammenstückeln von zwei Funktionen der Form cau x erhalten wir ein $v \in C^\infty$, das außerhalb A verschwindet und

in B identisch gleich 1 ist. Die gesuchte Funktion ist dann von der Form $u(x) = a \cdot v(x) \cdot \cos b x$ $(0 < a < 1 < b)$. Nach der LEIBNIZ-Regel gilt für die ersten m Ableitungen eine Ungleichung

$$|u^{(k)}(x)| \leqq 2^m a b^m K \qquad (k = 0, \ldots, m).$$

In jedem Punkt $x \in B$ ist ferner die $(m+1)$-te oder $(m+2)$-te Ableitung

$$\geqq \frac{a b^{m+1}}{\sqrt{2}}.$$

Geeignete Wahl von a und b (vgl. § 2) ergibt die gewünschte Funktion.

Man sieht, daß t die geforderten Eigenschaften hat: Wegen der Konvergenzbedingung (zweite Zusatzbedingung bei der Bestimmung der u_n) existiert t und gehört zu C^∞. Ist $x \in D$, so gehört x unendlich vielen B_n an. Somit gilt für dieses x und unendlich viele n die Ungleichung

$$M_{2n}(t, x) \geqq n.$$

Daher ist x Divergenzpunkt. Ist $x \notin D$, so gehört x nur endlich vielen A_n an. In der Summe $\sum u_n$ sind daher nur endlich viele Glieder nicht identisch Null bei x. Da die u_n keine Divergenzpunkte haben, folgt daß x kein Divergenzpunkt von t ist, w. z. b. w.

Die Funktion t hat nun zwar die geforderten Divergenzpunkte, über die Verteilung der regulären Stellen und Fehlkonvergenzpunkte wissen wir aber nicht Bescheid. Durch Abänderung von t in gewissen Intervallen erhalten wir jedoch ein s mit der geforderten Singularitätenverteilung. Dazu benützen wir

Hilfssatz 4. *Eine Funktion $f \in C^\infty$, ein $\varepsilon > 0$ und eine natürliche Zahl m seien gegeben. Dann existiert ein $g \in C^\infty$ mit den Eigenschaften:*

$$g(x) \text{ ist regulär für } 0 < x < 1 \text{ und singulär in } 0 \text{ und } 1,$$
$$g^{(k)}(0) = f^{(k)}(0),\ g^{(k)}(1) = f^{(k)}(1) \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$
$$|g^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| < \varepsilon \qquad (x \in I;\ k = 0, \ldots, m).$$

Beweis. Wir sehen zunächst von der Behauptung „singulär in 0 und 1" ab. Nach BESIKOVIČ [1924], § 4 (s. auch oben am Ende von § 2) gibt es eine für $0 < x < 1$ reguläre Funktion, welche dieselben Randableitungen wie f hat. Wir dürfen daher annehmen, daß alle Randableitungen von f verschwinden. Weiter gehen wir nun induktiv vor. Die Behauptung ist richtig für $m = 0$: Wir setzen einfach

$$g(x) = h(x) \operatorname{cau} x$$

und wählen $h(x)$ als Polynom so, daß

$$\left| h(x) - \frac{\hat{f}(x)}{\operatorname{cau} x} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x \in I)$$

ist, wobei $\hat{f}$ aus f durch eine geringfügige Abänderung entsteht, derart, daß $|\hat{f}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x \in I$ gilt und $\hat{f}$ stetig und in Umgebungen der Rand-

punkte identisch Null ist. Dann ist $f^{`}(x)/\text{cau}\, x$ stetig in I und wegen $|\text{cau}\, x| < 1$ folgt die Behauptung für $m = 0$. Ist nun die Behauptung für $m - 1$ bewiesen, so gilt sie auch für m: Nach der Induktionsvoraussetzung approximiert man nämlich zunächst die Funktion $f^* = f'$ durch ein g^* bis zur $(m-1)$-ten Ableitung mit einer Genauigkeit $< \eta < \varepsilon$. Die Funktion

$$G^*(x) = \int_0^x g^*(y)\, dy$$

hat dann alle gewünschten Eigenschaften bis auf die eine: $G^*(1)$ kann $\neq 0$ sein. Es ist aber sicher $|G^*(1)| < \eta$. Wir addieren nun zu $G^*(x)$ eine Korrekturfunktion der Form $a \int_0^x \text{cau}\, y\, dy$, so daß die neue Funktion $g(x)$ auch in 1 verschwindet. Wenn η genügend klein ist, erfüllt $g(x)$ alle unsere Forderungen. Singularität in den Randpunkten erreicht man nachträglich durch Addition von b cau x (b geeignet, klein).

Wir schreiten nun zur Abänderung von $t(x)$. E besteht aus abzählbar vielen offenen Intervallen $E_0, E_1, \ldots$. Wir dürfen annehmen, daß es unendlich viele verschiedene Intervalle sind, der Fall endlich vieler bietet keine besonderen Schwierigkeiten. Nach Hilfssatz 4 ersetzen wir $t(x)$ in E_m durch eine Funktion $g(x)$, die in E_m regulär ist, in den Randpunkten von E_m dieselben Ableitungen wie $t(x)$ hat, in diesen Punkten singulär ist und in E_m die Funktion t bis zur m-ten Ableitung bis auf $\frac{1}{m+1}$ genau approximiert. Führen wir diese Abänderungen fortlaufend durch, so erhalten wir eine Funktionenfolge t_0 (t in E_0 abgeändert), $t_1, t_2, \ldots$. Die Folge t_m konvergiert in C^∞ gegen eine Grenzfunktion s. Diese Funktion hat die gewünschten Eigenschaften; denn ist

1. $x \in D$, so ist $s^{(k)}(x) = t^{(k)}(x)$ für $k = 0, 1, \ldots$ und x ist Divergenzpunkt von s;

2. $x \in E$, so gehört x zu einem E_m, es gilt $s = t_m$ in E_m und s ist regulär in x;

3. $x \in F$, so ist $s^{(k)}(x) = t^{(k)}(x)$ für $k = 0, 1, \ldots$ und x ist Konvergenzpunkt von s. Weil F mager ist, gehört x zur abgeschlossenen Hülle $\overline{D}$ oder $\overline{E}$, im zweiten Falle ist x Randpunkt eines E_m oder Häufungspunkt von solchen, in jedem Falle also Berührpunkt singulärer Punkte von s und damit selbst singulär.

§ 4. Bemerkungen.

Wählt man die Ersatzfunktionen am Ende unserer Konstruktion nicht so, daß sie in den Endpunkten von E_m singulär ist, so erhält man möglicherweise zu viel reguläre Punkte. Dies kann jedoch leicht mit Hilfssatz 5 (s. unten) korrigiert werden.

Sind D, E, F so beschaffen, daß die Endpunkte der Komponenten von E zu F gehören, so kann man die Intervalle A_n, B_n so wählen, daß ihre Endpunkte in D oder F liegen: In der Durchschnittsdarstellung von D (s. § 3) darf man annehmen, daß jede Komponente K jeder offenen Menge ein $x \in D$

enthält. Wegen unserer Zusatzvoraussetzung können wir eine strengmonotone Folge singulärer $x_p \in K$ $(-\infty < p < \infty)$ bestimmen, so daß jedes $x \in D \cap K$ in einem Intervall x_p, x_q liegt. Wir machen nun einfach jedes Quadrupel $x_p, \ldots, x_{p+3}$ zum Endpunktsystem eines Intervallpaares A_n, B_n. — Der erste Teil unserer Konstruktion in § 3 liefert dann eine Funktion ohne überflüssige Fehlkonvergenzpunkte, so daß die Abänderung in den E_m nicht mehr nötig ist. Etwa fehlende Fehlkonvergenzpunkte können nach Hilfssatz 5 hinzugefügt werden. Zu einer Konstruktion im allgemeinen Fall gelangt man, indem man die so gefundene Funktion derart abändert, daß gewisse weitere Punkte y_p Divergenzpunkte werden. Dies erreicht man am besten während der Kondensation durch Zusatzelemente.

Ein anderer Weg beruht auf folgendem Ergebnis (s. WHITNEY [1934], BOAS [1935], GANAPATHY IYER [1944]):

Hilfssatz 5. *Ist F eine abgeschlossene nirgendsdichte Teilmenge von I, so gibt es ein $u \in C^\infty$ mit $u(x) \geqq 0$, das in $I - F$ regulär ist und F als Menge der Fehlkonvergenzpunkte besitzt. Dabei verschwinden für $x \in F$ alle Ableitungen von u.*

Beweis. Man erhält u in der Form

$$u(x) = \sum c_k \operatorname{cau}(x; a_k, b_k),$$

wo a_k, b_k die Endpunkte der Komplementintervalle von F durchläuft und die $c_k > 0$ so gewählt werden, daß die Reihe in C^∞ konvergiert (vgl. § 2).

Ist nun F gemäß unserem Satz vorgegeben, so stellt man F als Vereinigung aufsteigender abgeschlossener nirgendsdichter Mengen F_n dar und bildet zu jedem F_n nach Hilfssatz 5 ein u_n. In der Form

$$t(x) = \sum d_n u_n(x)$$

erhält man ein t in C^∞, für das jedes $x \in F$ Fehlkonvergenzpunkt ist. Durch geschickte Wahl der $d_n > 0$ erreicht man, daß jeder nicht zu F gehörige Häufungspunkt von F ein Divergenzpunkt der Funktion t ist: Sei

$$B_{km} = \left\{ x \,\middle|\, \frac{1}{m+1} \leq \text{Abstand}\,(x, F_k) \leq \frac{1}{m+2} \right\}.$$

Wir bestimmen die d_n induktiv. Sind $d_0, \ldots, d_n$ festgelegt, so wählen wir ein $p = p_n$, für das

$$M_p(d_0 u_0 + \cdots + d_n u_n, x) > (m+1)/2 \quad (x \in B_{km},\ 0 \leq k, m \leq n)$$

gilt. Dies ist möglich. Denn in einem $x \in B_{km}$ hat die TAYLOR-Entwicklung von $d_0 u_0 + \cdots + d_n u_n$ einen Konvergenzradius $\leq 1/(m+1)$ wegen des Gliedes u_k (die andern Glieder stören nicht, da $d_k, u_k \geqq 0$). Daher ist für $p = p(x)$ die Ungleichung erfüllt. Die Monotonie von M_p ergibt, daß man ein gemeinsames p für alle x wählen kann (HEINE-BOREL-Überdeckung!). d_{n+1} bestimmen wir nun so, daß die vorausgesetzten Ungleichungen bezüglich $M_{p_0}, \ldots, M_{p_n}$ durch das Hinzutreten von $d_{n+1} u_{n+1}$ nicht gestört werden

(vgl. § 3). Man sieht, daß man so die gewünschten Divergenzpunkte erhält. Genügend kleine d_n sichern die Regularität von $t(x)$ in $I-F$ (man betrachte Fortsetzungen von u_n ins Komplexe!). — Damit kann man die gesuchte Funktion in den Fällen konstruieren, wo jedes $x \in D$ Häufungspunkt von F ist. Auch dieser Weg läßt sich zu einem Beweis für den allgemeinen Fall ausbauen.

Zahorski [1947] zeigt zunächst, daß man sich wegen Hilfssatz 5 auf den Fall beschränken kann, daß F nur Häufungspunkte von D enthält. Seine Konstruktion in diesem Fall hat — wie nicht anders zu erwarten — eine gewisse Ähnlichkeit mit der unsrigen. Als Kondensationselemente benützt er im Gegensatz zu uns, wo diese Elemente singuläre Funktionen sind (vgl. bei Hilfssatz 3), Polynome, die zahlreichen Bedingungen genügen müssen, damit die entstehende Grenzfunktion die gewünschten Eigenschaften besitzt. Die Verwendung von Polynomen scheint hier also den Beweis zu erschweren. Jedoch dürfte sich die Zahorskische Methode auch noch abkürzen lassen.

Spezialfälle des Satzes (wie z. B. $D =$ abgeschlossenes Intervall, $E =$ Komplement von D; oder abzählbare Singularitätenmengen) sind natürlich einfacher zu behandeln. Statt I kann man auch andere Intervalle (halboffen, offen, unbeschränkt) betrachten. Auf Verallgemeinerungen und Verschärfungen von Satz 1 (Unterklassen von C^∞, mehrere Veränderliche) haben wir schon in § 1 und § 2 hingewiesen.

Der Vollständigkeit halber sei noch das folgende Ergebnis (Pringsheim [1893], strenge Beweise von Boas [1935], Zahorski [1947]) genannt:

Hilfssatz 6. *Hat für ein $f \in C^\infty$ die* Taylor*-Entwicklung in jedem Punkte einen Konvergenzradius $\geqq r > 0$, so ist f überall regulär.*

Den Beweis führt man am besten als Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, die Menge der singulären Punkte sei nicht leer. Als abgeschlossene Menge bildet sie dann einen vollständigen metrischen Raum Q. Wegen $\sup_n M_n(f, x) < \infty$ für jedes $x \in Q$ ist $M_n(f)$ gleichmäßig beschränkt in einer Kugel von Q, d. h. es gibt ein Intervall $J \subset I$, das Punkte aus Q enthält, so daß für die Menge der $x \in Q \cap J$ eine Beziehung $M_n(f, x) < K$ $(n = 0, 1, \ldots)$ gilt. Wir dürfen annehmen, daß die Länge von J kleiner als $1/4K$ ist. Liegt der reguläre Punkt y in J, so gehört er einem Regularitätsintervall E an, das einen Endpunkt, etwa x, in $Q \cap J$ hat. Taylor-Entwicklung von f um x liefert wegen der Voraussetzung die Werte von f in E sowie eine Fortsetzung des betreffenden Funktionselementes in $|z - x| \leqq 1/2K$ sowie die Schranke $2K^2$ für die Fortsetzung. Die Cauchysche Abschätzungsformel liefert $|f^{(n)}(y)|/n! \leqq 2K^2 4^n K^n$ und damit $M_n(f, y) \leqq 4K$. Diese Abschätzung gilt sogar für alle $y \in J$, daher ist f in J regulär, womit der gewünschte Widerspruch erzielt ist.

§ 5. Geschichtliches.

Wir machen noch einige Angaben über die geschichtliche Entwicklung der behandelten Theorie.

Lagrange [1813] glaubte noch, daß aus der Existenz und Endlichkeit aller Ableitungen in einem Punkte die Entwickelbarkeit der Funktion in eine Taylor-Reihe folge.

CAUCHY [1823] stellte demgegenüber die Erscheinung der Fehlkonvergenz an der (stetig fortgesetzten) Funktion $\exp(-1/x^2)$ fest. Die Gültigkeit dieses Beispiels wurde jedoch bezweifelt, weil die betreffende Funktion nicht in geschlossener Form dargestellt wird.

So unterscheidet z.B. HANKEL [1870], S. 102, zwischen illegitimen und legitimen Funktionen, wo eine Funktion legitim heißt, wenn sie für alle reellen x (mit möglicher Ausnahme einer diskreten Menge) bestimmt, endlich und stetig ist und alle Ableitungen dieselben Eigenschaften besitzen. Er sagt dann, daß alle legitimen Funktionen nach dem TAYLORschen Satz entwickelbar seien, wenn der Entwicklungspunkt kein Ausnahmepunkt sei. Er hat also eigentlich „stückweise reguläre" Funktionen im Auge.

DU BOIS REYMOND [1876], S. 110—114, meint: „Nun nimmt man gewöhnlich an, daß die Stetigkeit einer Funktion und ihrer sämtlichen Ableitungen ihre TAYLORsche Entwickelbarkeit bedinge. Danach müßte also die Stetigkeit der Ableitungen der Funktion mit dem Unendlich nach n der n-ten Ableitungen in unmittelbarem Zusammenhang stehen. Möglich ist das schon, aber ich muß bekennen, daß die Entdeckung einer solchen Beziehung, nach welcher aus der Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ eine Grenze für das Unendlich nach n von $f^{(n)}(x)$ folgte, mich ungemein überraschen würde. — Man steht also einerseits unter dem Einfluß der mit der mathematischen Muttermilch eingesogenen Vorstellung, daß eine in einem Intervall mit allen ihren Ableitungen stetige Funktion für jeden Wert x jenes Intervalls, höchstens einzelne Punkte ausgenommen, in denen ihr analytischer Sinn undeutlich wird, und für hinreichend kleine Werte von h sich auf die TAYLORsche Weise convergent entwickeln lassen müsse, andererseits erzeugen die obigen Überlegungen den Verdacht, ..." Und dann spricht er von der entscheidenden Frage: „Gibt es ... Funktionen ..., die für keinen besonderen Werth von x einer besonderen Erklärung bedürfen, bei denen ... die TAYLORsche Entwicklung ... versagt?" Er stellt nun zunächst eine solche Funktion mit Hilfe einer Reihe dar (s. unten) und bespricht dann $\exp(-1/x^2)$ mit der Bemerkung: „während gegen das Gewicht des zweiten, übrigens bekannten Beispieles schwer zu entkräftende Einwendungen erhoben werden können." Er schlägt vor, $f(x) = \exp(-1/x^2)$ für alle x auf gleiche Weise zu definieren, indem man diese Größe als $\lim_{\varepsilon \to 0} f(x \pm \varepsilon)$ auffasse.

Auch PRINGSHEIM [1893], S. 154—155, ist skeptisch und meint zu CAUCHYs Bemerkung: „Und obschon sich gegen das einzige zum Belege seiner Behauptung angeführte Beispiel gewisse, nicht recht zu widerlegende Einwände erheben lassen (...), so ist doch die sachliche Richtigkeit jener CAUCHYschen Bemerkung, ..., meines Wissens von neueren Mathematikern niemals bestritten worden, ... — Immerhin bin ich auch der Ansicht, daß jenes CAUCHYsche Beispiel nicht ausreicht, um die Existenz ... schlechthin evident zu machen." Weiter sagt er auf S. 161 zum CAUCHYschen Beispiel: „Indessen fehlt demselben aus zwei Gründen die rechte Beweiskraft: einmal (...), weil hier $f(0)$ und $f^{(n)}(0)$ nicht „eigentlich" definiert sind, d.h. nicht durch direktes Einsetzen von $x = 0$ ... berechnet werden können, ...; zweitens aber nach

meinem Dafürhalten auch deshalb, weil das so definierte $f(0)$ mit allen Ableitungen den besonderen Wert Null hat, so daß von einer convergierenden MacLaurinschen Reihe auch wiederum nur cum grano salis die Rede sein kann, da dieselbe formal eigentlich gar nicht existiert, ein Mangel der durch Einführung einer Funktion $f(x) = g(x) + \exp(-1/x^2)\,(\ldots)$ zwar verdeckt, aber in seinem Wesen doch nicht behoben wird." Mit der Kritik eines anderen Verfassers ist er aber gar nicht einverstanden (S. 154): „Was aber der Verfasser dort auf p. 234—236 vorbringt, enthält nur ein Körnchen Wahrheit, ... Alles übrige sind theils nichtssagende, theils geradezu absurde Redensarten."

Wir sehen, welche Schwierigkeiten und Kontroversen daraus entstanden, daß der Begriff „Funktion" noch nicht genügend geklärt war (genauer, daß Dirichlets Funktionsbegriff ([1837], Werke I, S. 135) noch nicht allgemein akzeptiert war); um so höher müssen wir die technischen Leistungen der damaligen Mathematiker einschätzen. Schließlich hängt ja auch grundsätzlich der Funktionsbegriff von der zugrunde gelegten Logik ab.

Du Bois Reymond [1876] gab als erster eine Funktion mit Divergenzsingularität an, nämlich

$$f(x) = \sum \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}.$$

Sodann kondensierte er diese Singularität über abzählbar viele Punkte und gibt sogar ein Beispiel ähnlich wie das oben in (4) genannte. Allerdings darf man an seine Rechnungen nicht den Maßstab heutiger Strenge anlegen; auch führt er bei beiden Kondensationen die Beweise nicht vollständig durch: „Es wäre freilich, weil diese Maximalhalbmesser gerade für $N = \infty$ unstetig sein könnten, noch direkt zu zeigen, daß die Funktion $F(x)$ nicht entwickelbar ist, doch wollen wir diese Rechnung nicht anstellen." „Es kann allerdings auch hier der (wie alle ähnlichen) schwierige Nachweis verlangt werden, daß die übrigen Terme dieses Unendlichwerden nicht aufheben."

Dies fiel schon Pringsheim [1893] auf, der schrieb: „die schon von Du Bois Reymond befolgte Methode, die in mancher Beziehung der Ergänzung geradezu bedarf, ..., derartig zu vervollkommenen, daß es möglich wird, ... völlig einwandfreie Beispiele zu erzeugen". Und an anderer Stelle [1894], S. 41, „zur Berichtigung eines ... von Du Bois Reymond begangenen fundamentalen Irrtums".

Pringsheim baut [1894] in exakter Form die Du Bois Reymondsche Methode weiter aus und gibt in Reihenform Funktionen mit Divergenz- bzw. Fehlkonvergenzpunkten an:

$$f(x) = \sum \frac{1}{p!} \frac{1}{1 + a^p x} \quad \text{bzw.} \quad = \sum \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{1 + a^p x}.$$

Der Begriff und das Prinzip der „Kondensation von Singularitäten" ist Hankel [1870] zu verdanken; s. auch G. Cantor [1882].

Die erste Kondensation von Singularitäten der Taylor-Entwickelbarkeit wurde von Du Bois Reymond (s. oben) versucht, später führten Fredholm

(s. MITTAG-LEFFLER [1891]) und PRINGSHEIM ([1893, 1894]) die Kondensation mit funktionentheoretischen Mitteln durch (dabei muß man allerdings für die Funktion komplexe Werte zulassen). PRINGSHEIM [1894], S. 50, vertritt dabei schon die Ansicht, daß die Fortsetzbarkeit eines analytischen Funktionselementes eine Ausnahmeerscheinung darstellt.

Auf neuere Arbeiten sind wir schon oben eingegangen. Im Literaturverzeichnis haben wir noch einige Arbeiten über quasianalytische Funktionen genannt, die mit unseren Untersuchungen nur einen losen Zusammenhang haben.

Das Kondensationsprinzip wurde später immer weiter ausgebaut. Die wesentlichste Verbesserung bedeutete dabei die Verwendung funktionalanalytischer Methoden durch die polnische Schule, insbesondere des Kategorieprinzips durch SAKS, s. BANACH-STEINHAUS [1927].

Literatur.

BANACH, S. [1932]: Théorie des opérations linéaires, S. 19. — BANACH-STEINHAUS [1927]: Sur le principe de la condensation de singularités. Fund. math. **9**, 50—61; FdM. **53**, 243. — BANG, TH. [1949]: Sur le points singuliers (dans un sens généralisé) des fonctions indéfiniment dérivables. Den 11te Scand. Mat. Kongress, 259—263, Oslo 1952; MRev **14**, 626; Zbl. **48**, 40. — BERNSTEIN, S. [1914]: Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle. Math. Ann. **75**, 449—468; FdM. **45**, 635. — BESIKOWITSCH, A. [1924]: Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen. Math. Z. **21**, 111—118; FdM. **61**, 258. — BOAS jr., R. P. [1935]: A theorem on analytic functions of a real variable. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 233—236; FdM. **61**, 258; Zbl. **11**, 201. — [1941]: Functions with positive derivatives. Duke Math. J. **8**, 163—172; FdM. **67**, 192; Zbl. **25**, 37. — CANTOR, G. [1882]: Über ein neues und allgemeines Kondensationprinzip der Singularitäten von Funktionen. Math. Ann. **19**, 588—594; FdM. **14**, 321. — CARLEMAN, T. [1926]: Les fonctions quasianalytiques. Paris. — CARTAN, H. [1940]: Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives. Paris; FdM. **66**, 1231. — CAUCHY, A. [1823]: Leçons sur le calcul infinitesimal, S. 152; (Werke, 2 Ser. IV, S. 230). — DIRICHLET, G. LEJEUNE [1837]: Die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Ostwalds Klassiker 116, Leipzig 1900. — DU BOIS REYMOND, P. [1876]: Über den Gültigkeitsbereich der Taylorschen Reihenentwicklung. Sber. Bayr. Akad. Wiss., 225—237; FdM. **8**, 127. (Abdruck: Math. Ann. **21**, 109—117; FdM. **15**, 183.) — EIDELHEIT, M. [1938]: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen. II. Stud. math. **7**, 150—154; FdM. **64**, 386; Zbl. **18**, 135. — GANAPATHY IYER, V. [1934]: Sur un problème de M. Carleman. C. R. Paris **199**, 1371–1373; FdM. **60**, 220; Zbl. **10**, 309. — [1944]: On singular functions. J. Indian Math. Soc., N. S. **8**, 94—108; MRev **7**, 117. — HANKEL, H. [1870]: Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. Abdruck Math. Ann. **20**, 102; FdM. **2**, 190. — HERZOG-PIRANIAN [1949]: Sets of convergence of Taylor series I. Duke Math. J. **16**, 529—534; MRev **11**, 91; Zbl. **34**, 48. — LAGRANGE, J. L. [1813]: Théorie des fonctions analytiques. Paris. Chap. V, Art. 30. (Œuvres IX, 65). — MANDELBROJT, S. [1935]: Séries de Fourier et classes quasianalytiques de fonctions. Paris; Zbl. **13**, 110. — [1942]: Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions. Houston, Tex. — MEYER-KÖNIG-ZELLER [1954]: Über das Taylorsche Summierungsverfahren. Math. Z. **60**, 348—352; MRev **16**, 28. — MITTAG-LEFFLER, G. [1891]: Sur une transcendente remarquable trouvée par M. Fredholm. Acta Math. **15**, 279; FdM. **23**, 421. — MORGENSTERN, D. [1954]: Unendlich oft differenzierbare nirgends analytische Funktionen. Math. Nachr. **12**, 74. — PÓLYA, G. [1938/39]: Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auf-

lösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen. Comm. math. Helvet. **11**, 234—252; FdM. **65**, 502; Zbl. **20**, 310. — Pringsheim, A. [1893]: Zur Theorie der Taylorschen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich. Math. Ann. **42**, 153—184; FdM. **25**, 386. — [1894]: Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes für Funktionen einer reellen Veränderlichen. Math. Ann. **44**, 57—82; FdM. **25**, 386. — [1894]: Über Funktionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylorsche Reihenentwicklung besitzen. Math. Ann. **44**, 41—56; FdM. **25**, 389. — Whitney, H. [1934]: Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 63—83; FdM. **60**, 217; Zbl. **8**, 249. — Zahorski, Z. [1946]: Problèmes de la théorie des ensembles et de fonctions. C. R. Paris **223**, 449—451; MRev 8, 41. — [1947]: Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres. Fund. Math. **34**, 183—245; MRev **8**, 141. — Zeller, K. [1953]: *FK*-Räume in der Funktionentheorie. I. Math. Z. **58**, 288—305; MRev **14**, 1092; Zbl. **51**, 86.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 3. März 1955.)

Kasch, F.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 368—387 (1955)

Abschätzung der Dichte von Summenmengen.

Von
Friedrich Kasch.

§ 1. Einleitung.

1. Fragestellung. Eine Menge $\mathfrak{B}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen heißt eine *wesentliche Komponente*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt: Für jede Menge $\mathfrak{A}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen mit positiver Dichte $\alpha<1$ ist die Dichte γ der Summenmenge $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ größer als α. Während man auf Grund der Schnirelmannschen Ungleichung bereits seit 1930 wußte, daß jede Menge $\mathfrak{B}$, die selbst eine positive Dichte besitzt, eine wesentliche Komponente ist, war es eines der überraschendsten Ergebnisse der additiven Zahlentheorie, als im Jahre 1933 A. J. Chintschin [2] feststellte, daß es auch wesentliche Komponenten der Dichte Null gibt; er zeigte nämlich, daß die Menge der Quadratzahlen eine wesentliche Komponente darstellt. Im Jahre 1936 machte dann P. Erdös die für die weitere Entwicklung grundlegende Entdeckung, daß dieses Ergebnis nicht an die Menge der Quadratzahlen gebunden ist, sondern für jede Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen zutrifft. Von E. Landau, A. Brauer, S. Selberg, A. Stöhr, H. E. Richert u. a. wurde der Grundgedanke von Erdös weiter ausgebaut und schärfere Ergebnisse, die im folgenden noch genauer angegeben werden, hergeleitet. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine einheitliche Beweismethode für alle diese Resultate zu entwickeln. Die Tragfähigkeit der Methode erweist sich dadurch, daß sie sogleich eine Verbesserung aller bisherigen Abschätzungen liefert. Außerdem bietet sie die Möglichkeit, die gleiche Frage auch bei anderen Mengen zu untersuchen, z. B. bei den Mengen $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\pm\mathfrak{B}$.

2. Voraussetzungen. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen. Unter $\mathfrak{A}(n)$ verstehen wir die Menge der Zahlen $a\in\mathfrak{A}$ mit $a\leq n$. Die Anzahlfunktion $A(n)$ der Menge $\mathfrak{A}$ gibt die Anzahl der natürlichen Zahlen aus $\mathfrak{A}(n)$ an. Die Zahl

$$\operatorname*{fin}_{n=1,2,\ldots}\frac{A(n)}{n}=\alpha \tag{1.1}$$

wird als *(finite) Dichte* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Danach gilt also für jede natürliche Zahl n:

$$A(n)\geq\alpha n.$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß $\mathfrak{A}$ in der Menge der natürlichen Zahlen echt enthalten sei; dann gilt offenbar $0\notin\mathfrak{A}$ und $\alpha<1$[1]). Ferner wird $1\in\mathfrak{A}$

[1]) Stimmt $\mathfrak{A}$ mit der Menge der natürlichen Zahlen überein, dann werden die hier behandelten Fragen gegenstandslos. Ist $0\in A$, dann gelten die folgenden Ergebnisse selbstverständlich erst recht; aus formalen Gründen ist aber bei den Beweisen die Voraussetzung $0\notin A$ zweckmäßig.

vorausgesetzt[2]). Sei $\overline{\mathfrak{A}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}$ in der Menge der natürlichen Zahlen mit der Anzahlfunktion $A(n)$, dann ist offenbar $\bar{A}(n) = n - A(n)$, und es gilt:

$$\bar{A}(n) \leq (1-\alpha)\, n.$$

Unter der *Summenmenge* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ mit der Dichte γ und der Anzahlfunktion $C(n)$ ist die Menge aller in der Gestalt $a+b$ darstellbaren Zahlen mit $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$ zu verstehen. Wir setzen $0 \in \mathfrak{B}$ und $1 \in \mathfrak{B}$ voraus; dann ist offenbar $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$, und jede natürliche Zahl m läßt sich in der Form

$$m = b_1 + \cdots + b_l$$

mit Zahlen $b_1, \ldots, b_l \in \mathfrak{B}$ darstellen. Sei $l(m)$ die kleinste natürliche Zahl, für die eine solche Darstellung möglich ist. Es werde

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=1,2,\ldots} l(m) = h, \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} l(m) = \lambda \tag{1.2}$$

gesetzt und h als *Ordnung*, λ als *mittlere Ordnung* von $\mathfrak{B}$ bezeichnet; offenbar gilt $\lambda \leq h$. Ist h endlich, dann wird $\mathfrak{B}$ eine *Basis endlicher Ordnung* der natürlichen Zahlen genannt. Dies sei im folgenden der Fall.

3. Ergebnisse. Unter diesen Voraussetzungen gilt nach P. Erdös [3]:

$$\gamma \geq \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{h}\right). \tag{1.3}$$

E. Landau [6] bewies die gleiche Abschätzung für λ an Stelle von h:

$$\gamma \geq \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.4}$$

A. Brauer [1] verschärfte die Ungleichung zu:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1-\sqrt{\alpha}}{\lambda}\right) = \alpha\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.5}$$

Der sehr umfangreiche Beweis von A. Brauer wurde kürzlich von A. Stöhr [11] von allen technischen Schwierigkeiten befreit, so daß der Beweisgedanke besonders klar hervortritt.

Nach A. Brauer bewies S. Selberg [9]:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.6}$$

Dieses Ergebnis ist für $\alpha > \frac{1}{9}$ besser als das von A. Brauer.

---

[2]) Ist $1 \notin \mathfrak{A}$, dann folgt $\alpha = 0$; die folgenden Abschätzungen sind dann trivialerweise richtig oder falsch. Genauer: Die Abschätzungen mit dem Zeichen $\geq$ sind richtig, und die mit dem Zeichen $>$ sind dann und nur dann richtig, wenn $\mathfrak{A}(n)$ mindestens ein Element enthält.

Schließlich zeigte kürzlich H. E. RICHERT[3]), daß auch die folgende, in gewissem Sinne zu (1.5) symmetrische Aussage gilt:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{1-\alpha}}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.7}$$

Wir erhalten hier die neuen Abschätzungen:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \tag{1.8}$$

und

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+(1-\alpha)}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.9}$$

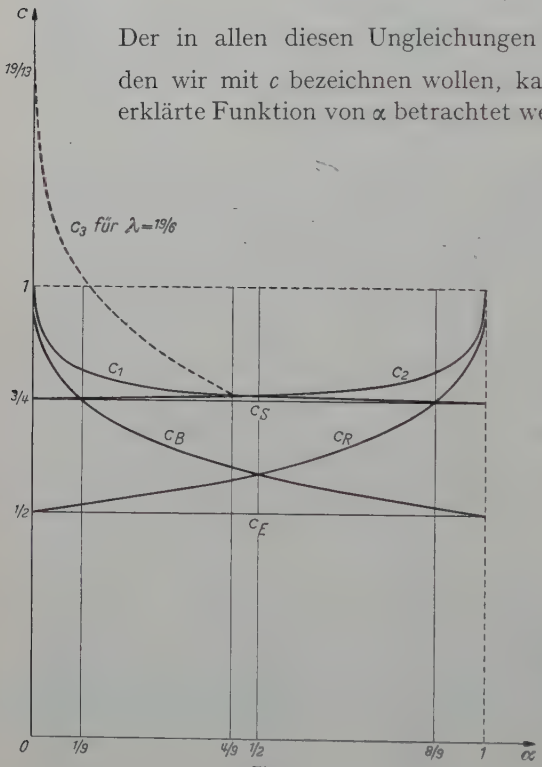


Fig. 1.

Der in allen diesen Ungleichungen auftretende Faktor von $\frac{1-\alpha}{\lambda}$, den wir mit c bezeichnen wollen, kann als eine im Intervall $0 \leq \alpha \leq 1$ erklärte Funktion von α betrachtet werden (siehe Abb.). Man hat dann:

ERDÖS-LANDAU: $c_E = \frac{1}{2}$;

A. BRAUER: $c_B = \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}$;

H. E. RICHERT: $c_R = \frac{1}{1+\sqrt{1-\alpha}}$;

S. SELBERG: $c_S = \frac{3}{4}$;

und die neuen Faktoren, die in dieser Arbeit hergeleitet werden:

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2},$$

$$c_2 = \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+(1-\alpha)}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}.$$

Eine Vermutung von P. ERDÖS (siehe [*10*], S. 7) besagt, daß der Wert $c = 1$ zulässig ist.[3a])

4. Asymptotische Abschätzungen. Eine Übertragung einer Ungleichung aus diesem Problemkreis auf asymptotische Dichten wurde bereits von P. ERDÖS [*4*] vorgenommen. Von H. ROHRBACH [*10*], H. KLÖTER und A. STÖHR [*5*] konnten weitere Abschätzungen für die asymptotische Dichte angegeben werden. Auch unsere Ergebnisse lassen sich auf den asymptotischen Fall übertragen. Dabei werden folgende Voraussetzungen gemacht.

[3]) Nach einer mündlichen Mitteilung.

[3a]) *Zusatz bei der Korrektur.* Inzwischen habe ich bemerkt, daß man durch eine Verallgemeinerung der hier dargestellten Überlegungen (insbesondere der aus § 2) zu dem

Sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von natürlichen Zahlen, dann wird analog zu (1.1)

$$\lim_{n=1,2,\ldots} \frac{A(n)}{n} = \alpha^*$$

als *asymptotische Dichte* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. $\mathfrak{B}$ sei eine Menge nichtnegativer Zahlen, die die Null enthält, und für die jetzt vorausgesetzt wird, daß sich jede natürliche Zahl $m > n_0$ (n_0 fest) in der Form

$$m = b_1 + \cdots + b_{l(m)} \qquad (b_i \in \mathfrak{B}) \tag{1.10}$$

darstellen lasse; sei $l(m)$ in dieser Darstellung minimal, dann wird

$$\overline{\lim_{n=1,2,\ldots}} \frac{1}{n} \sum_{m=n_0+1}^{n} l(m) = \lambda^* \tag{1.11}$$

als *asymptotische mittlere Ordnung* von $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Für die asymptotische Dichte γ^* von $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ gilt nun in Analogie zu c_1 und c_2:

$$\gamma^* \geq \alpha^* \left(1 + c_i^* \frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.12}$$

mit

$$c_1^* = \frac{1 + \sqrt{\alpha^*} + \alpha^*}{(1+\sqrt{\alpha^*})^2} \tag{1.13}$$

und

$$c_2^* = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha^*} + (1-\alpha^*)}{(1+\sqrt{1-\alpha^*})^2}. \tag{1.14}$$

Fast unmittelbar folgt ferner aus unseren Formeln, daß in (1.12) sogar $c_i^* = 1$ gilt, falls der Grenzwert von $\frac{A(n)}{n}$ (der dann notwendig mit α^* übereinstimmt) existiert[4]).

---

folgenden Ergebnis gelangt: Zu jedem λ gibt es ein $\alpha_\lambda > 0$, so daß für $0 \leq \alpha < \alpha_\lambda$ die Erdössche Vermutung übertroffen wird. Insbesondere gilt für $\lambda \geq \frac{8}{9}$:

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha \left(1 + c_3 \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$$

mit

$$c_3 = c_3(\alpha, \lambda) = c_1 \frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1+\alpha)\sqrt{\alpha}} = \frac{1+\sqrt{\alpha}+\alpha}{(1+\sqrt{\alpha})^2} \frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1+\alpha)\sqrt{\alpha}}.$$

Ein analoges Ergebnis erhält man auch im asymptotischen Fall.

Für die mittlere Ordnung der Menge der Quadratzahlen $\lambda = \frac{19}{6}$ ist c_3 in vorstehender Abbildung eingetragen.

Die Beweise dieser Ergebnisse sollen in einer in Kürze unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit dargestellt werden.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Abbildung für c_B und c_R eine Ungenauigkeit aufweist; diese Größen streben für α gegen 0 bzw. 1 selbst gegen 1.

[4]) Dieses Ergebnis wurde bereits von F. Krückeberg mitgeteilt (Seminar Göttingen, Dez. 1954). Dessen Beweis stützt sich auf die Schlußweise von S. Selberg [9].

§ 2. Die komplementären Grundformeln.

1. Wir beginnen damit, die bereits von ERDÖS und LANDAU benutzten Funktionen $D(m)$ und $E(m)$ einzuführen. Dabei seien n eine fest vorgegebene natürliche Zahl und m eine natürliche Zahl mit $1 \leq m \leq n$.

Definition 1. *$D(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$a \in \mathfrak{A} \quad mit \quad a + m \in \overline{\mathfrak{A}}(n);$$

$E(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$a \in \mathfrak{A} \quad mit \quad a + m \in \mathfrak{A}(n).$$

Offenbar gilt dann

$$D(m) + E(m) = A(n - m),$$

also

$$D(m) = A(n - m) - E(m). \tag{2.1}$$

Hilfssatz 1. *Ist t eine natürliche Zahl mit $1 \leq t < m$, dann gilt*

$$D(m) \leq D(t) + D(m - t). \tag{2.2}$$

Beweis. Sei a eine Zahl, die in $D(m)$ gezählt wird, d.h. $a + m = \bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(n)$. Ist bereits $a + t \in \overline{\mathfrak{A}}(n)$, dann wird a in $D(t)$ gezählt, ist jedoch $a + t = a' \in \mathfrak{A}(n)$, dann gilt $a' + m - t = \bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(n)$, und a' wird in $D(m - t)$ gezählt. Für zwei verschiedene Zahlen a und a_1, die in $D(m)$ gezählt werden, sind die zugeordneten Zahlen $a' = a + t$ und $a_1' = a_1 + t$ offenbar voneinander verschieden. Folglich gilt (2.2).

Sei nun

$$m = b_1 + \cdots + b_{l(m)} \qquad (b_i \in \mathfrak{B})$$

eine nach Voraussetzung existierende Darstellung von m, so besteht auf Grund von (2.2) die Ungleichung

$$D(m) \leq D(b_1) + \cdots + D(b_{l(m)}). \tag{2.3}$$

Wird $a \in \mathfrak{A}$ in $D(b_i)$ gezählt, dann gilt $a + b_i \in \overline{\mathfrak{A}}(n)$; $a + b_i$ ist also ein Element aus $\mathfrak{C}(n)$, welches nicht in $\mathfrak{A}$ liegt. Daraus folgt

$$D(b_i) \leq C(n) - A(n) \equiv R(n).$$

Wegen (2.3) hat man daher die bekannte Ungleichung

$$D(m) \leq l(m)\, R(n),$$

aus der man durch Summation von 1 bis $k \leq n$ zufolge (1.2) erhält:

$$\sum_{m=1}^{k} D(m) \leq \left\{ \sum_{m=1}^{k} l(m) \right\} R(n) \leq \lambda\, k\, R(n). \tag{2.4}$$

Hilfssatz 2. *Sei $k \leq n$ eine natürliche Zahl, dann gilt:*

$$\sum_{m=1}^{k} E(m) = \binom{A(n)}{2} - \Gamma(k) \tag{2.5}$$

mit

$$(2.6)\quad \begin{cases} \Gamma(k) = \sum_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{A(m+k+1) - A(m+k)\} & \text{für} \quad k \leqq n-2, \\ \Gamma(n-1) = \Gamma(n) = 0. \end{cases}$$

Beweis. Offenbar ist $\sum_{m=1}^{n} E(m) = \sum_{m=1}^{n-1} E(m) = \binom{A(n)}{2}$, womit die zweite Gleichung von (2.6) bewiesen ist. Sei jetzt $k \leqq n-2$; dann betrachten wir die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{k} E(m) = \sum_{m=1}^{n} E(m) - \sum_{m=k+1}^{n} E(m) = \binom{A(n)}{2} - \sum_{m=k+1}^{n} E(m).$$

In der Summe $\sum_{m=k+1}^{n} E(m)$ werden nach Definition von $E(m)$ alle Paare a, a' mit $a'-a > k\,(a', a \in \mathfrak{A}(n))$ gezählt. Die Anzahl dieser Paare ist bei festem a' offenbar gleich $A(a'-k-1)$, und durch Summation über alle $a' \in \mathfrak{A}(n)$ mit $a' > k+1$ erhält man

$$\sum_{m=k+1}^{n} E(m) = \sum_{m=k+2}^{n} A(m-k-1)\{A(m) - A(m-1)\},$$

denn $A(m) - A(m-1)$ ist gleich 0 oder 1, je nachdem, ob $m \notin \mathfrak{A}$ oder $m \in \mathfrak{A}$. Durch Änderung der Summationsgrenze folgt unmittelbar die erste Gleichung von (2.6).

Auf Grund von (2.1), (2.4) und (2.5) gilt jetzt

$$(2.7)\quad \lambda\, k\, R(n) \geqq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \Gamma(k).$$

Diese Beziehung nennen wir die *erste Grundformel* (1. GF.).

2. Zur Gewinnung der zweiten, dazu komplementären Grundformel, führen wir neue Funktionen $D'(m)$ und $E'(m)$ ein. Dabei sei auch jetzt n fest und $1 \leqq m \leqq n$.

Definition 2. *$D'(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(n) \quad \textit{mit} \quad \bar{a} - m \in \mathfrak{A};$$

$E'(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(n) \quad \textit{mit} \quad \bar{a} - m \in \overline{\mathfrak{A}}.$$

Offenbar gilt dann:

$$(2.8)\quad D'(m) + E'(m) = \bar{A}(n) - \bar{A}(m).$$

Wesentlich ist nun die Gleichung

$$(2.9)\quad D'(m) = D(m),$$

die unmittelbar aus den Definitionen von $D(m)$ und $D'(m)$ folgt. Daher hat man jetzt

$$D(m) = \bar{A}(n) - \bar{A}(m) - E'(m). \tag{2.10}$$

Ebenso wie $E(m)$ die Anzahl der Paare a, a' mit $a' - a = m\,(a', a \in \mathfrak{A}(n))$ angibt, gibt $E'(m)$ die Anzahl der Paare $\bar{a}$, $\bar{a}'$ mit $\bar{a}' - \bar{a} = m\,(\bar{a}', \bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}(n))$ an. Daher gilt Hilfssatz 2 auch für $E'(m)$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ an Stelle von $E(m)$ und $\mathfrak{A}$. Mit der Bezeichnung

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}(k) = \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} \bar{A}(m)\,\{\bar{A}(m+k+1) - \bar{A}(m+k)\} & \text{für} \quad k \leq n-2, \\ \bar{\Gamma}(n-1) = \bar{\Gamma}(n) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

besteht dann wegen (2.10) die folgende *zweite Grundformel* (2. GF.):

$$\lambda k R(n) \geq k\bar{A}(n) - \sum_{m=1}^{k} \bar{A}(m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} + \bar{\Gamma}(k). \tag{2.12}$$

3. Es soll jetzt angedeutet werden, unter welchen Voraussetzungen die in der Einleitung angegebenen Ergebnisse aus den beiden Grundformeln folgen.

ERDÖS-LANDAU: Folgt aus beiden Grundformeln für $k = n$. In der Literatur wird dazu die aus der 1. GF. für $k = n$ folgende Formel benutzt, die in dieser Form von E. LANDAU [6] aufgestellt wurde. Hier soll der Beweis unter Verwendung der 2. GF. angegeben werden. Dabei kann $\bar{A}(n) \geq 1$ vorausgesetzt werden, denn sonst ist $A(n) = n$ und folglich die Behauptung erfüllt. Wegen

$$\bar{A}(m) \leq (1-\alpha)\,m$$

erhält man dann aus (2.12) [unter Beachtung von $\bar{\Gamma}(n) = 0$]:

$$\lambda n R(n) \geq n^2 - nA(n) - (1-\alpha)\frac{n(n+1)}{2} - (1-\alpha)^2\frac{n^2}{2} + (1-\alpha)\frac{n}{2},$$

also

$$\frac{C(n)}{n} \geq \frac{(\lambda-1)}{\lambda}\frac{A(n)}{n} + \frac{\alpha(3-\alpha)}{2\lambda}$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\alpha + \frac{\alpha(3-\alpha)}{2\lambda} = \alpha\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Einen Vorteil gegenüber der üblichen Schlußweise kann man darin sehen, daß jetzt nur ein linearer und nicht wie dort ein quadratischer Ausdruck in $A(n)$ nach unten abzuschätzen ist.

BRAUER-RICHERT: c_B folgt aus der 1. GF. für $k \sim \sqrt{\alpha}\,n$, wenn $\Gamma(k)$ trivial durch 0 abgeschätzt wird[5]; entsprechend ergibt sich c_R aus der 2. GF. für $k \sim \sqrt{1-\alpha}\,n$, wenn $\bar{\Gamma}(k)$ durch 0 abgeschätzt wird[6].

[5] $k \sim \sqrt{\alpha}\,n$ bedeute, daß zwischen den Werten $[\sqrt{\alpha}\,n]$ und $[\sqrt{\alpha}\,n] + 1$ gemittelt wird.

[6] Der mir von H. E. RICHERT mitgeteilte Beweis erfolgt in anderer Weise. Die 1. GF. wird bis n summiert, jedoch wird $D(m)$ für $m > k \sim \sqrt{1-\alpha}\,n$ nicht durch $l(m)\,R(m)$, sondern $\bar{A}(n) - \bar{A}(m)$ nach oben abgeschätzt.

S. SELBERG: c_S folgt aus beiden Grundformeln für $k=[n/2]$ bei nichttrivialer Abschätzung von $\Gamma(k)$ bzw. $\overline{\Gamma}(k)$. Besonders kurz wird der Beweis, wenn man von der zweiten Grundformel ausgeht, da man dann — ebenso wie bei dem vorstehenden Beweis von c_E — nur einen linearen Ausdruck in $A(n)$ [(bzw. $\bar{A}(n)$] abzuschätzen hat.

Die Faktoren c_1, c_1^* und c_2, c_2^*:
c_1 folgt aus der 1. GF. gemittelt für die Werte

$$k \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}\, n = \frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}\, n \quad \text{und} \quad n-k$$

bei nichttrivialer Abschätzung von $\Gamma(k)$. Entsprechend erhält man c_2 aus der 2. GF. gemittelt für die Werte

$$k \sim \frac{\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}\, n = \frac{\sqrt{1-\alpha}(1-\sqrt{1-\alpha})}{\alpha}\, n \quad \text{und} \quad n-k$$

bei nichttrivialer Abschätzung von $\overline{\Gamma}(k)$. Die Beweise werden im finiten Fall vollständig ausgeführt. Im asymptotischen Fall, in dem die Beweise ganz analog verlaufen, werden wir nur den Beweis von c_1^* ausführen. Nach dem Vorhergehenden ist dann der Beweis von c_2^* fast unmittelbar klar.

§ 3. Beweise von c_1 und c_1^*.

1. Beweis von c_1. Beim Beweis der Ungleichungen (1.8) und (1.9) kann $0<\alpha<1$ angenommen werden. Nach Voraussetzung gilt bereits $\alpha<1$. Für $\alpha=0$ sind (1.8) und (1.9) offenbar erfüllt, denn wegen $1\in\mathfrak{A}$ hat man stets $\frac{C(n)}{n}>0$. Sei also im folgenden $0<\alpha<1$.

Zum Beweis der Ungleichung (1.8) gehen wir von der 1. GF. (2.7) aus; für $1\leqq k\leqq n-2$ gilt danach:

$$1)\quad \begin{cases} \lambda k R(n) \geqq \sum\limits_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{A(m+k+1)-A(m+k)\} \\ \qquad \geqq \sum\limits_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} m\{A(m+k+1)-A(m+k)\}. \end{cases}$$

Durch ABELsche Summation kann die letzte Summe umgeformt werden; man erhält so

$$(3.2)\qquad \lambda k R(n) \geqq \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha\left\{(n-k-1)A(n) - \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m)\right\}.$$

Wegen $1\leqq k\leqq n-2$ gilt auch $1\leqq n-k-1\leqq n-2$, und man darf daher in (3.2) k durch $n-k-1$ ersetzen:

$$(3.3)\qquad \lambda(n-k-1) R(n) \geqq \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha\left\{k A(n) - \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m)\right\}.$$

Diese Ungleichung wird mit α multipliziert und zu (3.2) addiert, wobei noch $-\lambda\alpha R(n)$ auf der linken Seite vernachlässigt wird:

$$(3.4)\quad \begin{cases} \lambda\{k+\alpha(n-k)\}R(n) \\ \geqq (1-\alpha^2)\sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - (1+\alpha)\binom{A(n)}{2} + \alpha\{n-k-1+\alpha k\}A(n) \\ \geqq \alpha\{n-1-(1-\alpha)k\}A(n) - (1+\alpha)\binom{A(n)}{2} + \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}k(2n-k-1). \end{cases}$$

In diese Ungleichung sollen nun gewisse Werte für k eingesetzt werden, und wir haben sicherzustellen, daß dafür die Voraussetzung $1\leqq k\leqq n-2$ erfüllt ist. Sei jetzt

$$(3.5)\qquad z=\varrho n \quad \text{mit} \quad \varrho=\frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}.$$

Zur Vereinfachung der Abschätzungen wollen wir im weiteren Beweis $\alpha\leqq 1/2$ und $n\geqq 4$ voraussetzen, was keine Einschränkung bedeutet[7]). Aus $\alpha<1$ folgt bereits $\varrho<1/2$, und wegen $n\geqq 4$ gilt dann $[\varrho n]+1\leqq n-2$. Schließlich können wir $1\leqq\varrho n$ annehmen; ist nämlich $\varrho n<1$, d.h. $n<\frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$, so folgt wegen $n\geqq 4$ die Schranke $\alpha<1/9$, und wegen $1\in\mathfrak{A}$, $1\in\mathfrak{B}$ gilt dann

$$\frac{C(n)}{n}\geqq\frac{2}{n}>\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}>\frac{3}{2}\sqrt{\alpha}>2\alpha>\alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

also ist (1.8) erfüllt. Insgesamt können wir jetzt $1\leqq[\varrho n]$ und $[\varrho n]+1\leqq n-2$ annehmen und dürfen daher

$$k=[z]=z-\eta \quad \text{bzw.} \quad k=[z]+1=z+\delta$$

in (3.4) einsetzen[8]):

$$\begin{aligned} &\lambda\{(1-\alpha)(z-\eta)+\alpha n\}R(n) \\ &\quad\geqq\alpha\{n-1-(1-\alpha)(z-\eta)\}A(n)-(1+\alpha)\binom{A(n)}{2}+ \\ &\quad+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z-\eta)(2n-z+\eta-1), \\ &\lambda\{(1-\alpha)(z+\delta)+\alpha n\}R(n) \\ &\quad\geqq\alpha\{n-1-(1-\alpha)(z+\delta)\}A(n)-(1+\alpha)\binom{A(n)}{2}+ \\ &\quad+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z+\delta)(2n-z-\delta-1). \end{aligned}$$

[7]) Für $\alpha>\frac{1}{2}$ ist (1.9) besser als (1.8). Die Fälle $n=1, 2, 3$ ergeben sich folgendermaßen: Wegen $1\in\mathfrak{A}$, $1\in\mathfrak{B}$ gilt $C(1)=1$, $C(2)=2$ sowie $C(3)=3$, falls $\mathfrak{A}(3)=\{1, 2, 3\}$ oder $=\{1, 2\}$ oder $=\{1, 3\}$ ist; ist aber $\mathfrak{A}(3)=\{1\}$, so ist $\alpha\leqq\frac{1}{3}$ und $\frac{C(3)}{3}\geqq\frac{2}{3}\geqq 2\alpha>\alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$.

[8]) Die folgende Schlußweise wurde zuerst von A. STÖHR [*13*] zur Vereinfachung des Beweises von (1.5) benutzt; Herr STÖHR stellte mir freundlicherweise sein Manuskript vor Erscheinen der Arbeit zur Verfügung.

Multipliziert man die erste dieser Ungleichungen mit δ, die zweite mit η und addiert sie, so folgt unter Beachtung von $\eta+\delta=1$:

$$(3.6)\quad \begin{cases} \lambda\{(1-\alpha)z+\alpha n\}R(n) \\ \geqq \alpha\{n-(1-\alpha)z\}A(n)-\frac{1+\alpha}{2}A^2(n)+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}z(2n-z)+ \\ \qquad +\frac{1-\alpha}{2}A(n)-\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z+\delta\eta). \end{cases}$$

Nun gilt wegen $n\geqq 4$, $\alpha\leqq 1/2$ und $\varrho<1/2$:

$$\frac{1-\alpha}{2}A(n)-\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}(z+\delta\eta)>\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}n-\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\geqq\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}\left(n-\frac{3}{4}n-\frac{3}{8}\right)=\frac{(1-\alpha)\alpha}{2}\left(\frac{n}{4}-\frac{3}{8}\right)>0;$$

daher erhält man aus (3.6)

$$\lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}\frac{R(n)}{n}>\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\frac{A(n)}{n}-\frac{(1+\alpha)}{2}\frac{A^2(n)}{n^2}+$$

$$+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho),$$

also

$$(3.7)\quad \begin{cases} \lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}\frac{C(n)}{n} \\ >\left(\lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}+\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\right)\frac{A(n)}{n}-\frac{1+\alpha}{2}\frac{A^2(n)}{n^2}+ \\ \qquad +\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho). \end{cases}$$

Wir wollen jetzt das Minimum des von $\frac{A(n)}{n}$ abhängenden Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Ungleichung für

$$\alpha\leqq\frac{A(n)}{n}\leqq\alpha(2-\alpha)$$

bestimmen, d.h. das Minimum der Funktion

$$f(\xi)=\left(\lambda\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}+\alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\right)\xi-\frac{1+\alpha}{2}\xi^2$$

für $\alpha\leqq\xi\leqq\alpha(2-\alpha)$. Die Berücksichtigung dieses Intervalls reicht für den Beweis aus; ist nämlich $\frac{A(n)}{n}=\xi>\alpha(2-\alpha)$, so auch

$$\frac{C(n)}{n}>\alpha(2-\alpha)\geqq\alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right),$$

und (1.8) ist erfüllt. Das Minimum der quadratischen Funktion $f(\xi)$ wird an einem Endpunkt des Intervalls angenommen, und zwar, wie jetzt gezeigt werden soll, für $\xi=\alpha$. Bei Beachtung des unter (3.5) angegebenen Wertes

für ϱ hat man

$$\begin{aligned} f(2\alpha-\alpha^2)-f(\alpha) &= \left\{\lambda\sqrt{\alpha}+\alpha\left(1-\sqrt{\alpha}+\alpha\right)\right\}\alpha(1-\alpha)-\frac{1+\alpha}{2}\alpha^2(1-\alpha)(3-\alpha) \\ &\geqq \left\{\sqrt{\alpha}(1-\alpha)+\alpha(1+\alpha)\right\}\alpha(1-\alpha)-\frac{1+\alpha}{2}\alpha^2(1-\alpha)(3-\alpha) \\ &= \left\{\sqrt{\alpha}-\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}\right\}\alpha(1-\alpha)^2 \\ &> \left\{\sqrt{\alpha}-\alpha\right\}\alpha(1-\alpha)^2>0. \end{aligned}$$

Folglich kann man in (3.7) $\frac{A(n)}{n}$ durch α ersetzen:

$$(3.8)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda\sqrt{\alpha}\,\frac{C(n)}{n} &> \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\{1-(1-\alpha)\varrho\}\alpha^2-\frac{1+\alpha}{2}\alpha^2+\frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\varrho(2-\varrho) \\ &= \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\{\alpha+2\varrho-(1+\alpha)\varrho^2\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \\ &= \lambda\alpha\sqrt{\alpha}+\frac{\sqrt{\alpha}(1+\sqrt{\alpha}+\alpha)}{(1+\sqrt{\alpha})^2}\alpha(1-\alpha). \end{aligned}\right.$$

Daraus erhält man unmittelbar die behauptete Abschätzung (1.8).

2. Beweis von c_1^*. Mit der gleichen Schlußweise, die zum Beweis der Ungleichung (1.8) führte, kann nun auch die Abschätzung (1.12) mit dem Faktor c_1^* bewiesen werden. Für $\alpha^*=0$ und $\alpha^*=1$ ist die Behauptung klar, ebenso für $\lambda^*=\infty$. Es sei daher $0<\alpha^*<1$ und $\lambda^*<\infty$. Zu jedem $\varepsilon>0$ mit $0<\varepsilon<\alpha^*$ gibt es dann ein n_ε so, daß

$$A(n)\geqq(\alpha^*-\varepsilon)n \quad \text{für} \quad n>n_\varepsilon$$

gilt; wir setzen $\alpha^*-\varepsilon=\alpha'$. Ferner gibt es zu jedem $\mu>0$ ein n_μ $(>n_0)$ so, daß

$$(3.9)\qquad \sum_{m=n_0+1}^{n} l(m)\leqq n(\lambda^*+\mu) \quad \text{für} \quad n>n_\mu$$

gilt; wir setzen $\lambda^*+\mu=\lambda'$. Sei jetzt

$$k=[\varrho n] \quad \text{mit} \quad \varrho=\frac{\sqrt{\alpha'}}{1+\sqrt{\alpha'}};$$

wegen $0<\alpha'<1$ ist dann $0<\varrho<\frac{1}{2}$. Folglich gibt es eine feste natürliche Zahl N so, daß für alle $n>N$ gilt:

$$k>\operatorname{Max}(n_\varepsilon,n_\mu), \qquad n-k-1>\operatorname{Max}(n_\varepsilon,n_\mu), \qquad 1\leqq k\leqq n-2.$$

Im folgenden sei stets $n>N$, so daß wir für k und $n-k-1$ als obere Summationsgrenzen von (3.9) die Gültigkeit von (3.9) voraussetzen können. Ferner bezeichne K geeignet zu wählende, von n unabhängige Konstanten, deren genauer Wert nicht interessiert. Die 1. GF. nimmt jetzt die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \lambda' k R(n) &\geqq \sum_{m=n_0+1}^{k} D(m) \geqq \sum_{m=n_0+1}^{k} A(n-m)-\sum_{m=1}^{k} E(m) \\ &= \sum_{m=n_0+1}^{k} A(n-m)-\binom{A(n)}{2}+\sum_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{A(m+k+1)-A(m+k)\}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$(3.10)\quad \begin{cases} \lambda' k R(n) \geqq \sum_{m=1}^{k} A(n-m) - \binom{A(n)}{2} + \\ \qquad + \alpha' \sum_{m=1}^{n-k-1} m\{A(m+k+1) - A(m+k)\} + Kn \\ = \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha' \left\{(n-k-1) A(n) - \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m)\right\} + Kn. \end{cases}$$

Auf Grund der angegebenen Voraussetzungen können wir in dieser Ungleichung k durch $n-k-1$ ersetzen:

$$\lambda'(n-k-1) R(n) \geqq \sum_{m=k+1}^{n-1} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \alpha' \left\{k A(n) - \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m)\right\} + Kn.$$

Diese Ungleichung wird mit α' multipliziert und zu (3.10) addiert:

$$\lambda'\{k + \alpha'(n-k)\} R(n)$$

$$\geqq (1-\alpha'^2) \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) - (1+\alpha') \binom{A(n)}{2} + \alpha'(n-k+\alpha' k) A(n) + Kn$$

$$\geqq \alpha'\{n - (1-\alpha') k\} A(n) - \frac{1+\alpha'}{2} A^2(n) + \frac{(1-\alpha'^2)\alpha'}{2} k(2n-k) + Kn.$$

Daraus folgt:

$$(3.11)\quad \begin{cases} \lambda'\{\varrho + \alpha'(1-\varrho)\} \frac{R(n)}{n} \geqq \alpha'\{1 - (1-\alpha')\varrho\} \frac{A(n)}{n} - \\ \qquad - \frac{1+\alpha'}{2} \frac{A^2(n)}{n^2} + \frac{(1-\alpha'^2)\alpha'}{2} \varrho(2-\varrho) + K\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Die gleiche Minimumbetrachtung wie im finiten Fall zeigt, daß entweder bereits

$$(3.12)\quad \frac{C(n)}{n} \geqq \alpha'\left(1 + \frac{1-\alpha'}{\lambda'}\right)$$

gilt oder in (3.11) $\frac{A(n)}{n}$ durch α' ersetzt werden darf. Dann folgt aus (3.11) analog zur Abschätzung (3.8):

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \alpha'\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha'}+\alpha'}{(1+\sqrt{\alpha'})^2} \frac{1-\alpha'}{\lambda'}\right) + K\frac{1}{n}.$$

Diese Abschätzung gilt also wegen (3.12) in jedem Falle.

Für $n \to \infty$ ergibt sich daraus:

$$\gamma^* \geqq \alpha'\left(1 + \frac{1+\sqrt{\alpha'}+\alpha'}{(1+\sqrt{\alpha'})^2} \frac{1-\alpha'}{\lambda'}\right);$$

da diese Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ und $\mu > 0$ gilt, folgt schließlich wie behauptet

$$\gamma^* \geqq \alpha^*\left(1 + c_1^* \frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right).$$

§ 4. Beweise von c_2 und c_2^*.

1. Beweis von c_2. Wie beim Beweis von c_1 in § 3 kann auch jetzt $0<\alpha<1$ vorausgesetzt werden. Ferner können wir $\bar{A}(n)\geqq 1$ annehmen, denn andernfalls ist $A(n)=n$ und somit die behauptete Ungleichung (1.9) erfüllt.

Zum Beweis der Ungleichung (1.9) gehen wir von der 2. GF. (2.12) aus. Für $1\leqq k\leqq n-2$ gilt danach:

$$
(4.1)\quad \left\{\begin{aligned}
\lambda k R(n) &\geqq k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\\
&\qquad +\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)\{\bar{A}(m+k+1)-\bar{A}(m+k)\}\\
&= k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\bar{A}(n-k-1)\bar{A}(n)-\\
&\qquad -\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m+k)\{\bar{A}(m)-\bar{A}(m-1)\}\\
&\geqq k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\bar{A}(n-k-1)\bar{A}(n)-\\
&\qquad -(1-\alpha)\sum_{m=1}^{n-k-1}(m+k)\{\bar{A}(m)-\bar{A}(m-1)\}\\
&= k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}+\bar{A}(n-k-1)\bar{A}(n)-\\
&\qquad -(1-\alpha)\left\{n\bar{A}(n-k-1)-\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Wegen $(1-\alpha)\,n-\bar{A}(n)\geqq 0$ kann man fortfahren:

$$
(4.2)\quad \left\{\begin{aligned}
\lambda k R(n) &\geqq k\bar{A}(n)-\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-\binom{\bar{A}(n)}{2}-\\
&\qquad -\{(1-\alpha)\,n-\bar{A}(n)\}(1-\alpha)(n-k-1)+(1-\alpha)\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)\\
&= \{k+(1-\alpha)(n-k-1)\}\bar{A}(n)-\binom{\bar{A}(n)}{2}-\\
&\qquad -\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)+(1-\alpha)\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)-(1-\alpha)^2 n(n-k-1).
\end{aligned}\right.
$$

Wegen $1\leqq k\leqq n-2$ gilt auch $1\leqq n-k-1\leqq n-2$, und daher darf man in dieser Ungleichung k durch $n-k-1$ ersetzen:

$$
(4.3)\quad \left\{\begin{aligned}
\lambda(n-k-1)R(n) &\geqq \{n-k-1+(1-\alpha)k\}\bar{A}(n)-\binom{\bar{A}(n)}{2}-\\
&\qquad -\sum_{m=1}^{n-k-1}\bar{A}(m)+(1-\alpha)\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-(1-\alpha)^2 nk.
\end{aligned}\right.
$$

Diese Ungleichung wird mit $(1-\alpha)$ multipliziert und zu (4.2) addiert, wobei noch $-\lambda(1-\alpha)R(n)$ auf der linken Seite vernachlässigt wird:

$$
(4.4)\quad \begin{cases}
\lambda\{k+(1-\alpha)(n-k)\}R(n)\\
\geqq \{k+2(1-\alpha)(n-k-1)+(1-\alpha)^2 k\}\bar{A}(n)-(2-\alpha)\binom{\bar{A}(n)}{2}-\\
\quad -\{1-(1-\alpha)^2\}\sum_{m=1}^{k}\bar{A}(m)-(1-\alpha)^2 n\{n-k-1+(1-\alpha)k\}\\
\geqq \{2(1-\alpha)(n-1)+\alpha^2 k\}\bar{A}(n)-\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}n\bar{A}(n)+\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}n-\\
\quad -\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k(k+1)-(1-\alpha)^2 n\{n-k-1+(1-\alpha)k\}\\
=\left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 k\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k^2-(1-\alpha)^2 n(n-\alpha k)-\\
\quad -2(1-\alpha)\bar{A}(n)+\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}n-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k+(1-\alpha)^2 n\\
\geqq \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 k\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k^2-(1-\alpha)^2 n(n-\alpha k)+\\
\qquad +\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}k.
\end{cases}
$$

In diese Ungleichung sollen nun gewisse Werte für k eingesetzt werden, und wir haben sicherzustellen, daß dafür die Voraussetzung $1\leqq k\leqq n-2$ erfüllt ist. Sei jetzt

$$
(4.5)\qquad z=\varrho n \quad \text{mit} \quad \varrho=\frac{\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\alpha}-(1-\alpha)}{\alpha};
$$

Da für $\alpha<1/2$ die Konstante c_1 besser als c_2 ist, können wir im folgenden $\alpha\geqq 1/2$ voraussetzen und außerdem wieder $n\geqq 4$[9]). Wegen $\varrho<1/2$ folgt dann $[\varrho n]+1=[z]+1\leqq n-2$. Wir betrachten nun zunächst den Fall $1\leqq z$ und dürfen jetzt

$$
k=[z]=z-\eta \qquad \text{bzw.} \qquad k=[z]+1=z+\delta
$$

in (4.4) einsetzen. Man erhält so zwei Ungleichungen, von denen die erste mit δ und die zweite mit η multipliziert wird; Addition beider Ungleichungen liefert dann [analog zu (3.6)]:

$$
(4.6)\quad \begin{cases}
\lambda\{z+(1-\alpha)(n-z)\}R(n)\\
\geqq \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 z\right\}\bar{A}(n)-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}z^2-(1-\alpha)^2 n(n-\alpha z)+\\
\quad +\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n-\frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}(z+\eta\delta).
\end{cases}
$$

Wegen

$$
n-(2-\alpha)(z+\eta\delta)>n-\frac{3}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{n}{4}-\frac{3}{8}>0
$$

[9]) Die Fälle $n=1, 2, 3$ wurden in Fußnote 7), S. 376 erledigt.

hat man schließlich

$$(4.7)\quad \begin{cases} \lambda\{z+(1-\alpha)(n-z)\}R(n) \\ > \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 z\right\}\bar{A}(n) - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}z^2 - (1-\alpha)^2 n(n-\alpha z). \end{cases}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß diese Ungleichung auch im Falle $0<z<1$ gilt. Aus der 2. GF. folgt für $k=n$:

$$\begin{aligned} \lambda n R(n) &\geq n\bar{A}(n) - \sum_{m=1}^{n}\bar{A}(m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} \\ &\geq n\bar{A}(n) - \frac{1-\alpha}{2}n(n+1) - \frac{1-\alpha}{2}n\bar{A}(n) + \frac{1-\alpha}{2}n \\ &= \frac{2+\alpha}{2}n\bar{A}(n) - \frac{1-\alpha}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\bar{A}(n) \\ &\geq \frac{2+\alpha}{2}n\bar{A}(n) - (1-\alpha)n^2. \end{aligned}$$

Daraus erhält man für $z-\eta=0$:

$$(4.8)\quad \begin{cases} \lambda\{z-\eta+(1-\alpha)(n-(z-\eta))\}R(n) \\ \geq \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2(z-\eta)\right\}\bar{A}(n) - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}(z-\eta)^2 - \\ \qquad - (1-\alpha)^2 n\{n-\alpha(z-\eta)\}. \end{cases}$$

Setzt man in (4.4) $k=z+\delta$ ein, multipliziert (4.4) mit η, (4.8) mit δ und addiert beide Ungleichungen, so folgt

$$(4.9)\quad \begin{cases} \lambda\{z+(1-\alpha)(n-z)\}R(n) \\ \geq \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2}n+\alpha^2 z\right\}\bar{A}(n) - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}z^2 - \\ \qquad - (1-\alpha)^2 n(n-\alpha z) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}n\eta - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}(z+2\delta)\eta. \end{cases}$$

Nun gilt wegen $z+\delta=1$ und $n\geq 4$:

$$n-(2-\alpha)(z+2\delta) \geq n-4+2\alpha > 0,$$

und daher folgt wegen $\eta>0$ aus (4.9) ebenfalls (4.7); diese Ungleichung gilt also jetzt allgemein unter der Voraussetzung (4.5). Setzt man in (4.7) $z=\varrho n$, so folgt wegen $A(n)=n-\bar{A}(n)$:

$$(4.10)\quad \begin{cases} \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)C(n) > \\ > -\left\{\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) - \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha^2\varrho\right\}\bar{A}(n) + \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)n - \\ \qquad - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}\varrho^2 n - (1-\alpha)^2(1-\alpha\varrho)n. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt feststellen, daß der Koeffizient von $\bar{A}(n)$ negativ ist, um dann $\bar{A}(n)$ durch $(1-\alpha)n$ abschätzen zu können. Für die Dichte β von $\mathfrak{B}$ kann im folgenden

$$\beta \leqq c_2 \alpha \tag{4.11}$$

vorausgesetzt werden, da unsere Behauptung (1.9) sonst bereits aus der bekannten SCHNIRELMANNschen Ungleichung[10])

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \alpha + \beta - \alpha\beta = \alpha + \beta(1-\alpha) \tag{4.12}$$

folgt (mit $\lambda = 1$). Zwischen β und λ besteht die Beziehung[11])

$$\lambda \geqq 2 - \beta,$$

so daß wegen (4.11)

$$\lambda \geqq 2 - c_2 \alpha$$

angenommen werden kann. Damit folgt unter Beachtung von (4.5) und

$$c_2 = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha} + 1 - \alpha}{(1 + \sqrt{1-\alpha})^2} = \frac{2 - 2\alpha + \alpha^2 - (2-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}{\alpha^2}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) - \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha^2\varrho \\
&\quad \geqq (2 - c_2\alpha)\sqrt{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha\left\{\sqrt{1-\alpha} - (1-\alpha)\right\} \\
&\quad = \{2 - (c_2+1)\alpha\}\sqrt{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2} \\
&\quad = \frac{1}{\alpha}\left\{(2-\alpha)\sqrt{1-\alpha} - 2(1-\alpha)^2\right\}\sqrt{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2} \\
&\quad = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\left\{4(1-\alpha)\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right) + \alpha^2\right\} > 0.
\end{aligned}$$

Der Koeffizient von $\bar{A}(n)$ in (4.10) ist also tatsächlich negativ; man erhält daher aus (4.10):

$$\begin{aligned}
\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)\frac{C(n)}{n} &> -\left\{\lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) - \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - \alpha^2\varrho\right\}(1-\alpha) + \\
&\quad + \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) - \frac{\alpha(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}\varrho^2 - (1-\alpha)^2(1-\alpha\varrho) \\
&= \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho)\alpha + \\
&\quad + \left\{\frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{2} - 2\frac{1-\alpha}{\alpha} + 2\alpha\varrho + 2(1-\alpha)\varrho - (2-\alpha)\varrho^2\right\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \\
&= \lambda(1-\alpha+\alpha\varrho) + \{1-\alpha+2\varrho-(2-\alpha)\varrho^2\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2},
\end{aligned}$$

[10]) Siehe z.B. A. J. CHINTSCHIN: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin: Akad.-Verlag 1951.

[11]) Siehe [9], S. 7, Fußnote. Der Vollständigkeit halber soll der Beweis im folgenden ausgeführt werden.

also

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha + \frac{1-\alpha+2\varrho-(2-\alpha)\varrho^2}{2(1-\alpha+\alpha\varrho)} \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}$$

$$= \alpha + \frac{1}{2\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)^2}\left\{\sqrt{1-\alpha}\left(2-\alpha+2\sqrt{1-\alpha}\right)+2\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)-\right.$$

$$\left.-(2-\alpha)\sqrt{1-\alpha}\right\}\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}$$

$$= \alpha + \frac{1+\sqrt{1-\alpha}+1-\alpha}{\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)^2}\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda} = \alpha\left(1+c_2\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Damit ist (1.9) bewiesen.

2. Beweis von c_2^*. Der Beweis der Ungleichung (1.12) mit der Konstanten c_2^* erfolgt analog zum finiten Fall. Die Voraussetzungen und die Grundformel werden in entsprechender Weise modifiziert, wie das beim Beweis von c_1^* im Bezug auf den Beweis von c_1 geschehen ist. Wir wollen daher den Beweis hier nicht im einzelnen ausführen, sondern lediglich darauf hinweisen, daß auch jetzt die im finiten Fall benutzten Hilfsmittel zur Verfügung stehen. Das ist einmal die SCHNIRELMANNsche Ungleichung, die bekanntlich auch im asymptotischen Fall richtig ist, und ferner die Abschätzung $\lambda^* \geqq 2-\beta^*$, deren Beweis wir auch noch für den finiten Fall nachzuholen haben.

Hilfssatz 3. *Unter den in der Einleitung gemachten Voraussetzungen gilt:*

$$\lambda \geqq 2-\beta, \tag{4.14}$$

$$\lambda^* \geqq 2-\beta^*. \tag{4.15}$$

Beweis[12]). Für $m \in \mathfrak{B}$ gilt $l(m)=1$, sonst $l(m) \geqq 2$. Daraus folgt

$$\lambda \geqq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} l(m) \geqq \frac{1}{n}\{B(n)+2(n-B(n))\} = 2-\frac{B(n)}{n},$$

also gilt (4.14). Da es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_ε gibt, so daß für alle $n > n_\varepsilon$ die Ungleichung

$$\lambda^* + \varepsilon \geqq 2 - \frac{B(n)}{n}$$

besteht, erhält man durch geeigneten Grenzübergang

$$\lambda^* + \varepsilon \geqq 2-\beta^*;$$

da diese Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ richtig ist, folgt schließlich (4.15).

§ 5. Differenzenmengen.

Es soll hier auf eine Verallgemeinerung der vorstehenden Überlegungen auf Differenzenmengen hingewiesen werden.

[12]) Im Anschluß an [9], S. 7, Fußnote.

Die bisher als $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ genannte Menge und die sich auf sie beziehenden Funktionen kennzeichnen wir durch ein hochgestelltes $+$, also: $\mathfrak{C}^+$, $C^+(n)$, $D^+(n)$, $E^+(n)$, ... Neben $\mathfrak{C}^+$ betrachten wir jetzt die Mengen

$$\mathfrak{C}^- = \{a - b\}_{a>b} \qquad (a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B}),$$

also die positiven Zahlen aus $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. Mit $C^-(n)$ werde die Anzahlfunktion von $\mathfrak{C}^-$ bezeichnet. Wir wollen nun auch zu $D^+(m)$, $E^+(m)$ bzw. $D'^+(m)$, $E'^+(m)$ analoge Funktionen einführen.

Definition 3. *$D^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}} \qquad \textit{mit} \qquad \bar{a} + m \in \mathfrak{A}(n);$$

$E^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}} \qquad \textit{mit} \qquad \bar{a} + m \in \overline{\mathfrak{A}}(n).$$

Definition 4. *$D'^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente*

$$a \in \mathfrak{A}(n) \qquad \textit{mit} \qquad a - m \in \dot{\overline{\mathfrak{A}}};$$

$E'^-(m)$ sei gleich der Anzahl der Elemente

$$a \in \mathfrak{A}(n) \qquad \textit{mit} \qquad a - m \in \mathfrak{A}.$$

Ein Vergleich zeigt, daß Definition 3 aus Definition 1 und Definition 4 aus Definition 2 durch Vertauschen von $\mathfrak{A}$ mit $\overline{\mathfrak{A}}$ und a mit $\bar{a}$ hervorgeht. Daraus folgt dann bereits, daß alle für $D^+(m)$ und $D'^+(m)$ hergeleiteten Beziehungen durch entsprechendes Vertauschen in solche für $D^-(m)$ und $D'^-(m)$ übergehen. Wie man sofort sieht, bleibt auch Hilfssatz 1 gültig. Schließlich gilt jetzt

$$D^-(b) \leqq C^-(n) - A(n) \qquad (b \in \mathfrak{B}),$$

denn in $D^-(b)$ werden die Elemente $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$ mit $\bar{a} + b = a' \in \mathfrak{A}(n)$, d.h. mit $\bar{a} = a' - b$ gezählt; diese sind offenbar Elemente aus $\mathfrak{C}^-(n)$, die nicht in $\mathfrak{A}(n)$ liegen. Aus diesen Angaben folgt bereits, daß auch jetzt zwei komplementäre Grundformeln gelten und daß man diese aus (2.7) und (2.12) dadurch erhält, daß man darin $A(n)$ durch $\bar{A}(n)$ und $C^+(n)$ durch $C^-(n)$ ersetzt:

$$(5.1) \qquad 1.\ \text{GF.}^-\text{:} \quad \lambda k\{C^-(n) - A(n)\} \geqq \sum_{m=1}^{k} \bar{A}(n-m) - \binom{\bar{A}(n)}{2} + \Gamma(k);$$

$$(5.2) \qquad 2.\ \text{GF.}^-\text{:} \quad \lambda k\{C^-(n) - A(n)\} \geqq kA(n) - \sum_{m=1}^{k} A(m) - \binom{A(n)}{2} + \Gamma(k).$$

Aus diesen Formeln können nun ebenfalls verschiedene Folgerungen gezogen werden. Wir wollen uns hier auf zwei Bemerkungen beschränken. Zunächst soll eine Abschätzung bewiesen werden, die P. Erdös [3] ohne Beweis angegeben hat.

Sei $$\mathfrak{C}' = \{|a \pm b|\} \quad (a \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B})$$

mit der Anzahlfunktion $C'(n)$, dann lautet die Ungleichung von P. ERDÖS[13]):

$$C'(n) \geqq A(n) + \frac{A(n)\{n - A(n)\}}{2hn}.$$

Wir beweisen sogleich die entsprechende Ungleichung für die in $\mathfrak{C}'$ enthaltene Menge

$$\mathfrak{C}^+ \cup \mathfrak{C}^- = \mathfrak{C}^\pm$$

mit der Anzahlfunktion $C^\pm(n)$ und mit λ an Stelle von h. Addiert man zur 1. GF.$^+$ (2.7) die 2. GF.$^-$ (5.2), beide für $k = n-1$, dann folgt

$$\begin{aligned}\lambda(n-1)\{C^+(n) + C^-(n) - 2A(n)\} &\geqq (n-1)A(n) - 2\binom{A(n)}{2} \\ &= (n-1)A(n) - A^2(n) + A(n) \\ &= A(n)\{n - A(n)\}.\end{aligned}$$

Wegen

$$C^+(n) + C^-(n) \leqq 2C^\pm(n)$$

erhält man daraus wie behauptet:

$$C^\pm(n) \geqq A(n) + \frac{A(n)\{n - A(n)\}}{2\lambda n}.$$

Diese Abschätzung kann noch verbessert werden; wir wollen uns darauf beschränken, eine Verbesserung für gerade n und $A(n) = n/2$ anzugeben. Dazu werden die 1. GF.$^+$ (2.7) und die 1. GF.$^-$ (5.1) addiert, wobei $\Gamma(k)$ und $\bar{\Gamma}(k)$ vernachlässigt werden und auf der linken Seite der Ungleichungen die vor der Berücksichtigung von $\mathfrak{B}$ vorhandenen Summen stehen bleiben; setzt man noch

$$\operatorname*{Max}_{m=1,\ldots,n}\left(D^+(m), D^-(m)\right) = D(m_0),$$

dann folgt

$$2kD(m_0) \geqq \sum_{m=1}^{k}\{D^+(m) + D^-(m)\} \geqq \frac{n^2}{4} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Mit den Werten

$$k_1 = \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] = \frac{n}{\sqrt{2}} - \eta, \qquad k_2 = \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] + 1 = \frac{n}{\sqrt{2}} + \delta,$$

wird nun vorstehende Ungleichung nach dem Schema aus § 3 gemittelt, d.h. sie wird einmal für $k = k_1$ und zum andern für $k = k_2$ genommen, im ersten Falle mit δ, im zweiten mit η multipliziert, und die so erhaltenen Ungleichungen werden addiert; man erhält dann

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,nD(m_0) &\geqq \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}n^2 + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}n - \frac{\delta\eta}{2} \\ &\geqq \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4}n^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}n^2\end{aligned}$$

[13]) Die in [3] tatsächlich angegebene Formel enthält offensichtlich einen Druckfehler.

also

$$D(m_0) > \frac{2-\sqrt{2}}{4}\, n.$$

Auf Grund der Bedeutung von $D^+(m)$ bzw. $D^-(m)$ ergibt sich aus dieser Abschätzung sofort die folgende Aussage:

Sind $a_1, \ldots, a_t$ beliebige natürliche Zahlen $\leq 2t$ $(t = 1, 2, \ldots,)$ und $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_t$ die restlichen natürlichen Zahlen $\leq 2t$, dann gibt es eine ganze (nicht notwendig positive) Zahl m_0, so daß die Anzahl der $\bar{a}_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ in der Folge der Zahlen $a_i + m_0$ $(i = 1, \ldots, t)$ größer als $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\, t$ ist[14].

Literatur.

[1] Brauer, A.: Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist. Math. Z. **44**, 212—232 (1939). — [2] Chintschin, A. J.: Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie. Mat. Sbornik **40**, 180—189 (1933). — [3] Erdös, P.: On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. Acta arithmetica **1**, 197—200 (1936). — [4] Erdös, P.: On the asymptotic density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers. II. (Engl. mit russ. Auszug.) Trav. Inst. Math. Tbilissi **3**, 217—224 (1938). — [5] Klöter, H., u. A. Stöhr: Wesentliche Komponenten und asymptotische Dichte. J. reine angew. Math. (im Druck). — [6] Landau, E.: Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts No. 35, Cambridge 1937. — [7] Ostmann, H. H.: Beweis einer Vermutung über die asymptotische Dichte und Verschärfung einer Abschätzung für die Dichte der Summen zweier Zahlmengen. Dtsch. Math. **6**, 213—247 (1941/42). — [8] Rohrbach, H.: Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jber. dtsch. Math.-Ver.igg **48**, 201—236 (1938). — [9] Selberg, S.: Note on a metrical problem in the additive theory of numbers. Arch. Math. Naturvidensk. **47**, 11—118 (1944). — [10] Selberg, S.: A survey of some recent results in additive number theory. Mat. Tidsskr. A **1949**, 1—15. — [11] Stöhr, A.: Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. III. Neuer Beweis eines Satzes von A. Brauer. J. reine angew. Math. (im Druck).

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 25. Februar 1955.)

[14] Nach einer Mitteilung von P. Erdös, dem ich auch den Hinweis auf diese Frage verdanke, wurde dieses Ergebnis zuerst von P. Scherk aufgestellt.

Nitsche, J.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 388—399 (1955)

Beiträge zur Verbiegung zweifach zusammenhängender Flächenstücke.

Von
Joachim Nitsche.

Allgemein gesprochen ist ein einfach zusammenhängendes Flächenstück mit vorgeschriebener Metrik eindeutig bestimmt durch die Krümmung der Randkurve. Bei Vorgabe einer Funktion ϱ als Krümmung der Randkurve existiert aber nur dann ein Flächenstück mit gegebener Metrik, falls ϱ drei Integralbedingungen erfüllt. Anders werden die Verhältnisse, wenn der einfache Zusammenhang nicht mehr vorausgesetzt wird. Dann kann es sehr wohl noch Flächen geben, die sich stetig ineinander verbiegen lassen und die alle die gleiche Randkurvenkrümmung besitzen[1]). Dieser Sachverhalt soll hier untersucht werden.

Um zunächst die Verhältnisse an einem einfachen Beispiel zu diskutieren, werden Verbiegungen einer Kugelzone betrachtet. Sie entstehe durch den Schnitt zweier paralleler Ebenen mit der Einheitskugel. In der vorliegenden Arbeit wird der Sonderfall betrachtet, daß die Randkrümmung bzw. gleichbedeutend damit die Normalkrümmung auf den zwei Rändern S_1 und S_2 jeweils konstant ($=\varrho_1$ bzw. $=\varrho_2$) ist. Die Bestimmung von Biegeflächen mit der vorgeschriebenen Randeigenschaft wird wie in [*1*] auf das Auffinden von Lösungen einer Integralrelation zurückgeführt. Diese läßt sich als ein Verzweigungsproblem nichtlinearer Integrodifferentialgleichungen auffassen. Der wesentliche Grund für die besondere Durchführung konstanter Krümmungen liegt darin, daß sich dann die Verzweigungsgleichung vollständig diskutieren läßt. Bei allgemeiner Funktion ϱ ist das nur in beschränktem Maße möglich. Dieser Fall soll deshalb erst in einer späteren Arbeit behandelt werden.

Die hier erzielten Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Mit R_1 bzw. R_2 wird der Radius des Schnittkreises S_1 bzw. S_2 bezeichnet. Die Aussagen sind für $R_1 = R_2$ und für $R_1 \neq R_2$ verschieden. Sie hängen also davon ab, ob die zwei Ebenen gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkt haben oder nicht. Im Falle der Gleichheit ergibt sich: Falls die zwei konstanten Normalkrümmungen ϱ_1, ϱ_2 von S_1, S_2 verschieden sind, existiert keine Biegefläche, für $\varrho_1 = \varrho_2$ existiert aber stets eine einparametrige Schar von Biegeflächen. Anders liegen die Verhältnisse bei $R_1 \neq R_2$. Hier kommt es auf das Vorzeichen von

$$A \equiv \frac{R_2^2 \varrho_2 - R_1^2 \varrho_1}{R_2^2 - R_1^2} - 1$$

[1]) Vgl. dazu auch E. Rembs [*3*]. Bei den bewiesenen Starrheitssätzen wird jedoch vorausgesetzt, daß die Randstreifen eben sind.

an. Für $A > 0$ existieren genau zwei Biegeflächen, für $A < 0$ hingegen keine der gewünschten Art. Die unverbogene Fläche ist die einzige unter der Gesamtheit ihrer Biegeflächen, für die der Ausdruck A Null ist. Insbesondere läßt sich also eine Kugelzone, deren Ränder symmetrisch zum Mittelpunkt liegen, unter Festhalten der Krümmungen ihrer Ränder stetig verbiegen, nicht verbiegbar bei dieser Randbedingung jedoch ist eine Zone mit unsymmetrisch zum Mittelpunkt verlaufenden Rändern.

Es wird allerdings vorausgesetzt, daß ϱ_1 und ϱ_2 nicht zu stark von 1 abweichen. Das entspricht der Forderung, nur Flächen in einer gewissen „Nachbarschaft" der unverbogenen Kugelzone zu betrachten.

I. Herleitung der Integralrelation.

Wir betrachten den durch zwei parallele Ebenen begrenzten Teil der Einheitskugel. Bilden wir wie in [1_{I}] die Kugel stereographisch auf die x, y-Ebene ab und legen die Schnitte parallel zu dieser, so entspricht der Zone ein Ringgebiet T, dessen zwei Ränder konzentrische Kreise S_1, S_2 vom Radius r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$ sind. Um Biegeflächen mit der geforderten Randeigenschaft zu gewinnen, müssen wir Lösungen L, M, N der Gauß-Codazzischen Gleichungen (vgl. [1_{I}], Formel (3)) bestimmen, für die auf $S = \{S_1 + S_2\}$ die Beziehung

$$L \sin^2\varphi - 2M \sin\varphi \cos\varphi + N \cos^2\varphi = \sigma^2 \varrho$$

gilt. ϱ ist die gegebene Normalkrümmung, σ der Abbildungsfaktor (vgl. [1_{I}], Formel (2))

$$\sigma = \frac{2}{1 + r^2}, \tag{1}$$

und r, φ sind ebene Polarkoordinaten.

Durch die gleichen Überlegungen wie in [$1_{\mathrm{I,III}}$] können wir folgendes beweisen:

1. U, V seien aus den Koeffizienten L, M, N der zweiten Grundform einer Biegefläche der Kugelzone vermöge

$$U = M, \qquad V = \tfrac{1}{2}(L - N)$$

gewonnen. Haben die Randkurven der Fläche die Normalkrümmungen ϱ_1 und ϱ_2, so gilt[2])

$$\left\{ \iint_T \left[U(a_x - b_y) - V(a_y + b_x) + \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\sigma^4 + U^2 + V^2}\,\{(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y\} \right] dx\,dy \right. \tag{2}$$
$$\left. = \oint_S R_{a,b}\,\sigma^2 \varrho\, ds \right.$$

für alle stetig differenzierbaren Funktionen a, b mit

$$a \cos\varphi + b \sin\varphi = 0 \quad \text{auf} \quad S. \tag{3}$$

[2]) Dabei soll $\oint_S = \oint_{S_2} - \oint_{S_1}$ und $\varrho = \varrho_i$ auf S_i sein.

$R_{a,b}$ ist durch

$$R_{a,b} \equiv -a \sin\varphi + b \cos\varphi \tag{4}$$

definiert.

2. Erfüllen die stetig differenzierbaren Funktionen U, V die Integralrelation (2), so läßt sich durch Lösen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen eine Biegefläche der Kugelzone bestimmen, die

$$L = \sqrt{\sigma^4 + U^2 + V^2} + V, \qquad M = U, \qquad N = \sqrt{\sigma^4 + U^2 + V^2} - V$$

als Koeffizienten der zweiten Grundform und ϱ als Normalkrümmung des Randes besitzt.

Für die gestellte Aufgabe ist also die Lösbarkeit der Integralrelation (2) zu untersuchen. Wegen

$$\iint_T \{(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y\}\, dx\, dy = \oint_S R_{a,b}\sigma^2\, ds$$

kann (2) auch in der Form

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_T [U(a_x - b_y) - V(a_y + b_x) + F(U,V)\{(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y\}]\, dx\, dy \\ \qquad = \oint_S R_{a,b}\sigma^2(\varrho - 1)\, ds \end{array} \right. \tag{5}$$

geschrieben werden, wobei $F(U, V)$ für

$$F(U,V) = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\sigma^4 + U^2 + V^2} - 1 \tag{6}$$

steht.

II. Bestimmung von U, V bei gegebenen Funktionen ϱ und F.

Fassen wir F und ϱ als bekannte Funktionen der Klasse $E_{1,\lambda}$ in $T + S$ bzw. auf S auf, so stellt die Integralrelation (5) ein lineares Randwertproblem für U, V dar. Um dieses zu untersuchen, betrachten wir wie in [I_{III}] das Hilfsproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} a_x - b_y = f(x,y) \\ a_y + b_x = g(x,y) \end{array}\right\} & \text{in } T \\ a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0 & \text{auf } S \end{array} \right. \tag{7}$$

mit bekannten Funktionen f, g. Dieses Problem ist von Herrn I. N. VEKUA [5] behandelt, der folgendes beweist: Das zu (7) adjungierte Randwertproblem hat genau eine Nullösung[3])

$$\mathring{u} = k\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \mathring{v} = -k\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{8}$$

---

[3]) Dabei sei k so gewählt, daß $\iint_T (\mathring{u}^2 + \mathring{v}^2)\, dx\, dy = 1$ gilt, d.h.

$$k = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{\pi(r_2^2 - r_1^2)}}.$$

Die Gln. (7) besitzen eine Lösung, falls das Paar (f, g) die Bedingung

$$\iint_T (\mathring{u} f - \mathring{v} g)\, dx\, dy = 0 \tag{9}$$

erfüllt. Zu einer partikulären Lösung kann noch ein Vielfaches der Nullösung

$$\mathring{a} = -y, \quad \mathring{b} = x \tag{10}$$

addiert werden.

Soweit die Aussage von Vekua. Da für $\mathring{a}, \mathring{b}$

$$\mathring{R}_{\mathring{a},\mathring{b}} \equiv -\mathring{a} \sin\varphi + \mathring{b} \cos\varphi = r \neq 0 \quad \text{auf} \quad S \tag{11}$$

gilt, läßt sich eine partikuläre Lösung von (7) durch

$$\oint_S \sigma^2 h(s)\, R_{a,b}\, ds = 0 \tag{12}$$

normieren, falls die stetige Funktion $h(s)$ nur die Bedingung

$$\oint_S \sigma^2 h(s)\, \mathring{R}_{\mathring{a},\mathring{b}}\, ds \neq 0 \tag{13}$$

erfüllt. Für die so eindeutig bestimmten Lösungen (a, b) von (7) existieren Auflösungsformeln der Gestalt[4])

$$\begin{cases} a(x,y) = \iint_T (K_{11} f + K_{12} g)\, d\xi\, d\eta, \\ b(x,y) = \iint_T (K_{21} f + K_{22} g)\, d\xi\, d\eta. \end{cases} \tag{14}$$

Die Kerne $K_{ij}(x, y; \xi, \eta)$ sind durch die Forderungen

$$\iint_T \{K_{i1}(x,y;\xi,\eta)\, \mathring{u} - K_{i2}(x,y;\xi,\eta)\, \mathring{v}\}\, d\xi\, d\eta = 0 \quad (i = 1,2;\ (x,y) \in T) \tag{15}$$

$$\begin{cases} \oint_S P_i(s,\xi,\eta)\, h(s)\, \sigma^2\, ds = 0 \quad (i = 1,2,\ (\xi,\eta) \in T) \\ \left(P_i(s,\xi,\eta) \equiv -\sin\varphi\, K_{1i}(x(s), y(s); \xi, \eta) + \cos\varphi\, K_{2i}(x(s), y(s); \xi, \eta)\right) \end{cases} \tag{16}$$

eindeutig bestimmt. Außerdem weisen sie die charakteristische Singularität auf, und es ist,

$$\left| K_{ij}(x,y;\xi,\eta) \cdot \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right|$$

für alle (x, y), $(\xi, \eta) \in T$ und $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ gleichmäßig beschränkt.

Die Integralrelation (5) muß für alle der Randbedingung (3) genügenden Funktionen a, b bestehen. Der Raum dieser Funktionenpaare ist die Summe der Vielfachen von $(\mathring{a}, \mathring{b})$ und des Raumes $\mathfrak{E}$ der durch die zwei Bedingungen

$$\begin{cases} \mathfrak{E}: & a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0 \\ & \oint_S \sigma^2 h(s)\, (-a\sin\varphi + b\cos\varphi)\, ds = 0 \end{cases} \tag{17}$$

[4]) Sie lassen sich ebenso konstruieren wie in [I_{III}].

eingeschränkten Funktionenpaare. Durch

$$f = a_x - b_y, \qquad g = a_y + b_x \tag{18}$$

wird $\mathfrak{E}$ isomorph auf den durch

$$\mathfrak{F}: \quad \iint_T (\mathring{u} f - \mathring{v} g)\, dx\, dy = 0 \tag{19}$$

bestimmten Raum $\mathfrak{F}$ der Paare (f, g) abgebildet. Dabei wird wie in [I_{III}] vorausgesetzt: $a, b \in E_{1,\lambda}$, $f, g \in E_{0,\lambda}$.

Wir betrachten die Integralrelation für $(a, b) \in \mathfrak{E}$. Dazu lassen wir $(f, g) \in \mathfrak{F}$ beliebig variieren und setzen für a, b in (5) die Ausdrücke (14) ein. Vorher formen wir aber (5) durch partielle Integration (vgl. [I_{III}], Formel (22)) um:

$$\begin{cases} \iint_T \{U(a_x - b_y) - V(a_y + b_x)\}\, dx\, dy = \oint_S R_{a,b}\sigma^2(\varrho - 1 - F)\, ds + \\ \qquad + \iint_T \sigma^2(b F_x - a F_y)\, dx\, dy. \end{cases} \tag{20}$$

Wir erhalten

$$\iint_T (U f - V g)\, dx\, dy = \oint \sigma^2(\varrho - 1 - F)\, ds \iint_T \{P_1(s; \xi, \eta) f + P_2(s; \xi, \eta) g\}\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \iint_T \sigma^2 F_x\, dx\, dy \iint_T (K_{21} f + K_{22} g)\, d\xi\, d\eta - \iint_T \sigma^2 F_y\, dx\, dy \iint_T (K_{11} f + K_{12} g)\, d\xi\, d\eta$$

und nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge die Gleichung

$$\iint_T d\xi\, d\eta \cdot f(\xi, \eta) \Big\{ U + \iint_T K_{11}\sigma^2 F_y\, dx\, dy - \iint_T K_{21}\sigma^2 F_x\, dx\, dy - \oint_S P_1\sigma^2(\varrho - 1 - F)\, ds \Big\}$$
$$- \iint_T d\xi\, d\eta\, g(\xi, \eta) \Big\{ V - \iint_T K_{12}\sigma^2 F_y\, dx\, dy + \iint_T K_{22}\sigma^2 F_x\, dx\, dy + \oint_S P_2\sigma^2(\varrho - 1 - F)\, ds \Big\} = 0.$$

Da (f, g) nur die Bedingung (19) erfüllen muß und sonst willkürlich ist, gilt also

$$\begin{cases} U(\xi, \eta) = \iint_T \{K_{21} F_x - K_{11} F_y\}\sigma^2\, dx\, dy - \oint_S P_1\sigma^2 F\, ds + \oint_S P_1\sigma^2(\varrho - 1)\, ds + c\mathring{u} \\ V(\xi, \eta) = \iint_T \{-K_{22} F_x + K_{12} F_y\}\sigma^2\, dx\, dy + \oint_S P_2\sigma^2 F\, ds - \oint_S P_2\sigma^2(\varrho - 1)\, ds + c\mathring{v} \end{cases} \tag{21}$$

mit einer beliebigen Konstanten c. Wegen (15) läßt sie sich in der Form

$$c = \iint (\mathring{u} U + \mathring{v} V)\, dx\, dy \tag{22}$$

darstellen. Für jede Wahl von c ist (U, V) (21) eine Lösung der Integralrelation mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$. Nun muß noch $(\mathring{a}, \mathring{b})$ eingesetzt werden (vgl. [I_I], Formel (18_I)):

$$\oint r\sigma^2(\varrho - 1)\, ds = 8 \iint_T \frac{1 - r^2}{(1 + r^2)^3} F\, dx\, dy. \tag{23}$$

Satz 1. *Die Integralrelation* (5) *bzw.* (20) *ist den Gln.* (21) *und* (23) *äquivalent.*

Satz 2. *Erfüllen* $\varrho \in E_{1,\lambda}$ *auf* S *und* $F \in E_{1,\lambda}$ *in* $T+S$ *die Bedingung* (23), *so besitzt die Integralrelation eine einparametrige Lösungsschar* $U(x, y; c)$, $V(x, y; c)$. *Ist der Parameter so gewählt, daß* (22) *gilt, so stellen* (21) *die Auflösungsformeln dar.*

Mit bekannten Abschätzungen der Potentialtheorie finden wir noch

Satz 3. *Für* U, V (21) *besteht eine Abschätzung der Gestalt*[5])

$$\|U, V\|_{1,\lambda} \leq C_1 \{\|F\|_{1,\lambda} + \|\varrho - 1\|_{1,\lambda} + |c|\} \tag{24}$$

mit einer passenden Schranke C_1.

III. Die Integralrelation als System von Integrodifferentialgleichungen mit einer Nebenbedingung.

Setzen wir für F in (21) wieder den Ausdruck (6) ein, so erhalten wir ein System von nichtlinearen Integrodifferentialgleichungen mit einem Parameter c, während (23) als Bedingungsgleichung für c anzusehen ist. Unsere Aufgabe ist die Untersuchung dieses Gleichungssystems auf Lösbarkeit bzw. Verträglichkeit, d.h. die Untersuchung, ob 1. die Integrodifferentialgleichungen eindeutig bestimmte Lösungen besitzen und 2. sich die Bedingungsgleichung (23) durch geeignete Wahl von c erfüllen läßt bzw. ob dabei und wann Verzweigungen auftreten. Wir setzen noch

$$\varrho = 1 + \varepsilon \bar{\varrho}.$$

Aus (6) folgt

$$\|F(U, V)\|_{1,\lambda} \leq C_2 (\|U, V\|_{1,\lambda})^2$$

und

$$\|F(U, V) - F(\overline{U}, \overline{V})\|_{1,\lambda} \leq C_2 (\|U, V\|_{1,\lambda} + \|\overline{U}, \overline{V}\|_{1,\lambda}) \|U - \overline{U}, V - \overline{V}\|_{1,\lambda}$$

mit einer geeigneten Konstanten C_2. Zusammen mit (24) finden wir für Lösungen U, V bzw. $\overline{U}, \overline{V}$ der Integrodifferentialgleichungen

$$\begin{cases} \|U, V\|_{1,\lambda} \leq C_1 \{C_2 (\|U, V\|_{1,\lambda})^2 + |c| + |\varepsilon| \|\bar{\varrho}\|_{1,\lambda}\}, \\ \|U - \overline{U}, V - \overline{V}\|_{1,\lambda} \leq C_1 C_2 \{\|U, V\|_{1,\lambda} + \|\overline{U}, \overline{V}\|_{1,\lambda}\} \|U - \overline{U}, V - \overline{V}\|_{1,\lambda}. \end{cases} \tag{25}$$

Mit diesen Abschätzungen läßt sich die Konvergenz sukzessiver Approximationen, ausgehend von $U = V = 0$, für alle ε, c mit

$$|c| < \Delta, \quad |\varepsilon| \|\bar{\varrho}\|_{1,\lambda} < \Delta, \quad \Delta = \frac{1}{16 C_1^2 C_2}$$

folgern. Die Grenzfunktionen U und V gehören in $T+S$ jedenfalls zur Klasse $E_{1,\lambda}$ und sind Lösungen der Integrodifferentialgleichungen (21). Außerdem gilt

$$\|U, V\|_{1,\lambda} \leq 2 C_1 (|c| + |\varepsilon| \|\bar{\varrho}\|_{1,\lambda}) < \frac{1}{4 C_1 C_2}.$$

---

[5]) Dabei ist $\|U, V\| = \|U\| + \|V\|$ gesetzt und die Norm $\|F\|_{1,\lambda}$, $\|\bar{\varrho}\|_{1,\lambda}$ in der üblichen Weise definiert; vgl. z.B. J. Schauder [4]. Der Beweis läßt sich so führen wie der von Hilfssatz 2 bei Joh. Nitsche [2].

Für zwei Lösungen U, V und $\overline{U}, \overline{V}$ der Integrodifferentialgleichungen (21) mit

$$\|U, V\|_{1,\lambda} < E, \quad \|\overline{U}, \overline{V}\|_{1,\lambda} < E, \quad E = \frac{1}{4 C_1 C_2}$$

würde aus (25_2)

$$\|U - \overline{U}, V - \overline{V}\|_{1,\lambda} < \|U - \overline{U}, V - \overline{V}\|_{1,\lambda}$$

folgen, was

$$U \equiv \overline{U}, \quad V = \overline{V}$$

bedingt. Damit haben wir die Gültigkeit der folgenden zwei Sätze bewiesen:

Satz 4. *Es existieren positive Schranken Δ, E, so daß das System* (21) *für*

$$|c| < \Delta, \quad |\varepsilon| \, \|\overline{\varrho}\|_{1,\lambda} < \Delta$$

eine Lösung $U, V \in E_{1,\lambda}$ mit $\|U, V\|_{1,\lambda} < E$ besitzt.

Satz 5. *Das System* (21) *hat sicher nur eine Lösung $U, V \in E_{1,\lambda}$, für die $\|U, V\|_{1,\lambda}$ unterhalb E liegt.*

Während die Auflösungsformeln (21) zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen geeignet waren, werden wir im späteren ausschließlich mit der Integralrelation arbeiten. In Zusammenhang mit den am Schluß des Abschnittes II gemachten Bemerkungen können wir die zwei letzten Sätze auch folgendermaßen formulieren:

Satz 6. *Die Integralrelation* (5) *mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$ besitzt für $|\varepsilon| \, \|\overline{\varrho}\|_{1,\lambda} < \Delta$ genau eine Lösung $U, V \in E_{1,\lambda}$, für die mit*

$$c = \iint_T (\mathring{u} U + \mathring{v} V) \, dx \, dy \tag{22}$$

die Ungleichungen $|c| < \Delta$ und $\|U, V\|_{1,\lambda} < E$ bestehen.

IV. Konstante Normalkrümmung auf S_1 und S_2.

Die Lösungen (U, V) der Integrodifferentialgleichungen bzw. der Integralrelation mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$ sind nur dann Lösungen des Problems, wenn noch

$$\varepsilon \oint_S \overline{\varrho} \, r \, \sigma^2 \, ds = 8 \iint_T \frac{1 - r^2}{(1 + r^2)^3} F(U, V) \, dx \, dy \tag{26}$$

gilt. Wir werden U, V und F in eine Reihe nach Potenzen von $\varepsilon^k c^l$ entwickeln und nach Ausführen der Integration für (26) eine Gleichung

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} A_{kl} \frac{\varepsilon^k c^l}{k! \, l!} = 0$$

erhalten, die dann zu diskutieren ist. Während sich aber bei allgemeiner Funktion $\overline{\varrho}(s)$ nur in beschränktem Maße allgemeine Aussagen machen lassen, gelingt in einem Falle die vollständige Behandlung der Verzweigungsgleichung. Wir wollen annehmen, $\overline{\varrho}$ sei durch

$$\overline{\varrho} = \begin{cases} \overline{\varrho}_1 & \text{auf} \quad S_1 \\ \overline{\varrho}_2 & \text{auf} \quad S_2 \end{cases} \tag{27}$$

mit zwei Konstanten $\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2$ gegeben. Die bislang willkürliche Normierungsfunktion $h(s)$ spezialisieren wir entsprechend

$$h = \begin{cases} h_1 & \text{auf } S_1 \\ h_2 & \text{auf } S_2. \end{cases} \tag{28}$$

Die zwei Konstanten h_1, h_2 müssen gemäß (13) der Ungleichung

$$\frac{r_2^2}{(1+r_2^2)^2} h_2 - \frac{r_1^2}{(1+r_1^2)^2} h_1 \neq 0 \tag{29}$$

genügen. Für die gesuchten Lösungen U, V der Integralrelation (5) mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$ setzen wir

$$\begin{cases} U = c\,\mathring{u} + r^{-2}\alpha(r)\sin 2\varphi \\ V = c\,\mathring{v} + r^{-2}\alpha(r)\cos 2\varphi \end{cases} \tag{30}$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion $\alpha(r) = \alpha(r; \varepsilon, c)$ an. Durch (30) ist auf Grund $\mathring{u} \sim \cos 2\varphi$, $\mathring{v} \sim -\sin 2\varphi$ von vornherein die Bedingung (22) gesichert. Wir erhalten für F:

$$F = \sigma^{-2}\sqrt{\sigma^4 + r^{-4}(k^2 c^2 + \alpha^2)} - 1,$$

wofür wir bei Einführen von

$$\Sigma = \frac{1}{r^2\sigma^2} = \frac{(1+r^2)^2}{4r^2} \tag{31}$$

auch

$$F = \sqrt{1 + \Sigma^2(k^2 c^2 + \alpha^2)} - 1 \tag{32}$$

schreiben können. Die Integralrelation lautet jetzt

$$\begin{cases} \iint\limits_T \frac{\alpha(r)}{r^2}\{(a_x - b_y)\sin 2\varphi - (a_y + b_x)\cos 2\varphi\}\, r\, dr\, d\varphi + \\ + \iint\limits_T F\{(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y\}\, dx\, dy = \varepsilon \oint\limits_S R_{a,b}\sigma^2\bar{\varrho}\, ds. \end{cases} \tag{33}$$

Wegen der Rotationssymmetrie genügt es, für a, b nur Funktionen der Gestalt

$$a = -\lambda(r)\, y, \qquad b = \lambda(r)\, x \tag{34}$$

zu wählen. Denn dann wird

$$a_x - b_y = -r\lambda'\sin 2\varphi, \qquad a_y + b_x = r\lambda'\cos 2\varphi$$

$$(\sigma^2 b)_x - (\sigma^2 a)_y = \frac{1}{r}(\Sigma^{-1}\lambda)',$$

wobei die Differentiation nach r durch einen Strich angezeigt ist. Demnach sind die in (33) in geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke winkelunabhängig, fallen also bei der Integration über φ nicht heraus. (a, b) gehört zu $\mathfrak{E}$, falls λ der Bedingung

$$\frac{r_2^2}{(1+r_2^2)^2} h_2\lambda(r_2) - \frac{r_1^2}{(1+r_1^2)^2} h_1\lambda(r_1) = 0$$

bzw.

$$\Sigma_2^{-1} h_2 \lambda(r_2) - \Sigma_1^{-1} h_1 \lambda(r_1) = 0 \qquad (\Sigma_i = \Sigma(r_i)) \tag{35}$$

genügt.

Bei Einsetzen der Funktionen a, b (34) in (33) erhalten wir nach Integration bezüglich φ und Kürzen des Faktors 2π

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \{-\alpha \lambda' + F(\Sigma^{-1}\lambda)'\} = \varepsilon \{\Sigma_2^{-1} \bar{\varrho}_2 \lambda(r_2) - \Sigma_1^{-1} \bar{\varrho}_1 \lambda(r_1)\}$$

oder nach partieller Integration

$$\int_{r_1}^{r_2} (\alpha' - \Sigma^{-1} F') \lambda(r)\, dr = \{\alpha(r) - \Sigma^{-1}(F - \varepsilon \bar{\varrho})\} \lambda(r)\Big|_{r_1}^{r_2}.$$

Da $\lambda(r)$ an die einzige Gl. (35) gebunden ist, folgt

Satz 7. *Die Funktionen U, V (30) sind Lösungen der Integralrelation mit $(a, b) \in \mathfrak{E}$, falls α der Differentialgleichung*

$$\Sigma \alpha' = \left(\sqrt{1 + \Sigma^2 (k^2 c^2 + \alpha^2)}\right)' \tag{36}$$

für $r_1 < r < r_2$ und den Randbedingungen

$$\begin{cases} \alpha(r_1) - \Sigma_1^{-1}(F(r_1) - \varepsilon \bar{\varrho}_1) = \varkappa \Sigma_1^{-1} h_1 \\ \alpha(r_2) - \Sigma_2^{-1}(F(r_2) - \varepsilon \bar{\varrho}_2) = \varkappa \Sigma_2^{-1} h_2 \end{cases} \tag{37}$$

mit einer Konstanten $\varkappa$ genügt.

Die Lösungen α und der Parameter $\varkappa$ besitzen folgende Eigenschaften:

Satz 8. 1. *Bei dem Ansatz $\alpha = \sum_{k,l=0}^{\infty} \alpha_{kl}(r) \frac{\varepsilon^k c^l}{k!\, l!}$ sind α_{kl} rekursiv durch Quadraturen bestimmbar.*

2. *Ist $\alpha(r)$ eine beliebige in der Umgebung von $r = 1$ definierte Lösung der Differentialgleichung (36), so gilt*

$$\alpha(r) = \alpha\left(\frac{1}{r}\right).$$

3. *Für $r_2 = r_1^{-1}$ hat $\varkappa$ den Wert*

$$\varkappa = \varepsilon \frac{\bar{\varrho}_2 - \bar{\varrho}_1}{h_2 - h_1}.$$

Die Aussage des Punktes 1. folgt daraus, daß α_{kl} einer Gleichung

$$\alpha'_{kl} = P(\alpha_{mn}, \alpha'_{\bar{m}\bar{n}})$$

genügt, wobei $P(\ldots)$ ein Polynom in den angegebenen Argumenten mit $m, \bar{m} < k$ bzw. $n, \bar{n} < l$ ist; die Randbedingung besitzt die Gestalt

$$\alpha_{kl}(r_i) - P(\alpha_{mn})\big|_{r=r_i} = \varkappa_{kl} \Sigma_i^{-1} h_i \qquad (i = 1, 2).$$

Zum Beweis von 2. nehmen wir an, $\alpha(r)$ sei für $r_0 < r < r_0^{-1}$ $(r_0 < 1)$ Lösung von (36). Da Σ (31) der Funktionalgleichung $\Sigma(r) = \Sigma\left(\frac{1}{r}\right)$ genügt und die

Differentialgleichung homogen in Ableitungen nach r ist, erfüllt somit auch $\hat{\alpha} = \alpha\left(\frac{1}{r}\right)$ die Differentialgleichung. $\hat{\alpha}(r)$ und $\alpha(r)$ sind also Lösungen der Gleichung erster Ordnung und haben für $r = 1$ die gleichen Anfangswerte. Somit stimmen sie überhaupt überein. Bei 3. ist die Voraussetzung von 2. erfüllt, d.h. die fragliche Lösung hat bei r_1 und r_2 den gleichen Wert. Da auch $\Sigma_1 = \Sigma_2$ gilt, finden wir durch Subtraktion der zwei Gln. (37)

$$\Sigma_1^{-1}(\varkappa h_1 - \varepsilon \bar{\varrho}_1) = \Sigma_1^{-1}(\varkappa h_2 - \varepsilon \bar{\varrho}_2)$$

oder für $\varkappa$ den angegebenen Wert.

V. Die Bedeutung des Parameters $\varkappa$.

Wie wir wissen, stellen die durch (30) definierten Funktionen U, V nur dann eine Lösung der Integralrelation dar, falls noch die Gl. (26), die jetzt

$$\varepsilon(\Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2 - \Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1) = 8\int_{r_1}^{r_2} \frac{1-r^2}{(1+r^2)^3} F r\, dr \tag{38}$$

lautet, besteht. Dabei ist für F der Ausdruck (32) einzusetzen, und α ist die Lösung des Randwertproblems (36), (37). Gl. (38) können wir umformen. Wegen

$$\frac{d}{dr}\Sigma^{-1} = 8\frac{1-r^2}{(1+r^2)^3} r$$

wird

$$I \equiv 8\int_{r_1}^{r_2} \frac{1-r^2}{(1+r^2)^3} F r\, dr = \Sigma^{-1} F\Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \Sigma^{-1} F'\, dr$$

und mit (36)

$$I = \Sigma^{-1} F\Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \alpha'\, dr = -(\alpha - \Sigma^{-1} F)\Big|_{r_1}^{r_2}.$$

Berücksichtigen wir nun (37), so wird

$$I = -\varkappa(\Sigma_2^{-1} h_2 - \Sigma_1^{-1} h_1) + \varepsilon(\Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2 - \Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1).$$

Damit geht (38) in

$$\varkappa = 0 \tag{39}$$

über.

Satz 9. *Genau dann ist das durch* (30) *definierte Funktionenpaar* U, V *Lösung der Integralrelation* (5), *wenn der Parameter* $\varkappa$ *verschwindet.*

Beachten wir die Ergebnisse des Satzes 8, so finden wir

Hauptsatz 1. *Es sei* $r_1 r_2 = 1$ *und* $\bar{\varrho}$ *auf* S_1 *bzw.* S_2 *konstant und gleich* $\bar{\varrho}_1$ *bzw.* $\bar{\varrho}_2$. *Gilt dann*

1. $\bar{\varrho}_1 \neq \bar{\varrho}_2$, *so hat die Integralrelation nur für* $\varepsilon = 0$ *Lösungen, dann aber eine einparametrige Schar,*

2. $\bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho}_2$, *so hat die Integralrelation für jeden Wert von* ε ($|\varepsilon| < \varepsilon_0$) *eine einparametrige Lösungsschar.*

VI. Diskussion bei $r_1 r_2 \neq 1$.

Aus der Differentialgleichung (36) und den Randbedingungen (37) folgt, daß α und damit auch $\varkappa$ analytische Funktionen von c^2 und ε sind. Wir bestimmen die ersten Entwicklungskoeffizienten. Zunächst ist wegen der Eindeutigkeit (Satz 6) $\alpha_{00}=0$ und damit auch $\varkappa_{00}=0$. $\alpha_{02}(r)$ genügt dem Problem

$$\Sigma\,\alpha_{02}' = \frac{d}{dr}\left\{\frac{\partial^2}{\partial c^2}\sqrt{1+\Sigma^2(k^2c^2+\alpha^2)}\right\}\Big|_{\varepsilon=c=0},$$

$$\alpha_{02}(r_i) - \Sigma_i^{-1}\frac{\partial^2}{\partial c^2}\sqrt{1+\Sigma^2(k^2c^2+\alpha^2)}\Big|_{\varepsilon=c=0} = \varkappa_{02}\Sigma_i^{-1}h_i \qquad (i=1,2)$$

oder

$$\text{(40)}\qquad \begin{cases} \alpha_{02}' = 2k^2\Sigma' \\ \alpha_{02}(r_i) - k^2\Sigma_i = \varkappa_{02}\Sigma_i^{-1}h_i \qquad (i=1,2). \end{cases}$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\alpha_{02} = 2k^2\Sigma + \mathring{\alpha}_{02}$$

mit einer Integrationskonstanten $\mathring{\alpha}_{02}$. Bei Subtraktion der zwei Gl. $(40_{2\,3})$ finden wir

$$\text{(41)}\qquad (\Sigma_2^{-1}h_2 - \Sigma_1^{-1}h_1)\,\varkappa_{02} = k^2(\Sigma_2 - \Sigma_1).$$

Weiter ist α_{10} durch

$$\text{(42)}\qquad \begin{cases} \alpha_{10}' = 0 \\ \alpha_{10}(r_i) + \Sigma_i^{-1}\bar{\varrho}_i = \varkappa_{10}\Sigma_i^{-1}h_i \qquad (i=1,2) \end{cases}$$

gegeben, woraus wir

$$\text{(43)}\qquad (\Sigma_2^{-1}h_2 - \Sigma_1^{-1}h_1)\,\varkappa_{10} = \Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2 - \Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1$$

erhalten. Schließlich genügt α_{20} der Differentialgleichung

$$\alpha_{20}' = 2\alpha_{10}^2\Sigma',$$

d.h. es ist

$$\alpha_{20} = 2\alpha_{10}^2\Sigma + \mathring{\alpha}_{20}$$

wobei für α_{10} die Konstante

$$\varkappa_{10} = \frac{h_1\bar{\varrho}_2 - h_2\bar{\varrho}_1}{\Sigma_1 h_2 - \Sigma_2 h_1}$$

einzusetzen ist. Aus den Randbedingungen

$$\alpha_{20}(r_i) - \alpha_{10}^2\Sigma_i = \varkappa_{20}\Sigma_i^{-1}h_i \qquad (i=1,2)$$

gewinnen wir

$$\text{(44)}\qquad (\Sigma_2^{-1}h_2 - \Sigma_1^{-1}h_1)\,\varkappa_{20} = \alpha_{10}^2(\Sigma_2 - \Sigma_1).$$

Auf Grund von (29) können $\varkappa_{10}$ und α_{10} und damit auch $\varkappa_{10}$ und $\varkappa_{20}$ nicht gleichzeitig verschwinden, es sei denn für $\bar{\varrho}_1=\bar{\varrho}_2=0$.

Hauptsatz 2. *Es sei* $r_1 r_2 \neq 1$. *Gilt dann*

1. $\Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1 \neq \Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2$, *so lautet die Verzweigungsgleichung* $\varkappa=0$:

$$\varkappa_{10}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varkappa_{02}c^2 + \cdots = 0.$$

Es existieren also zu jedem ε *mit*

$$\text{(45)}\qquad -\frac{\varkappa_{10}}{\varkappa_{02}}\varepsilon > 0$$

genau zwei Lösungen $c=c(\varepsilon)$ der Verzweigungsgleichung, zu ε mit

$$\frac{\varkappa_{10}}{\varkappa_{02}}\varepsilon>0 \tag{46}$$

jedoch keine ($\varepsilon=c=0$ ist Lösung).

2. *$\Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1=\Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2$, aber $\bar{\varrho}_1^2+\bar{\varrho}_2^2\neq 0$, so lautet die Verzweigungsgleichung*

$$\alpha_{10}^2\varepsilon^2+\tfrac{1}{2}k^2c^2+\cdots=0,$$

d.h. außer $\varepsilon=c=0$ existiert keine Lösung.

3. *$\bar{\varrho}_1=\bar{\varrho}_2=0$, so tritt ε nicht auf und die Verzweigungsgleichung heißt*

$$k^2c^2+\cdots=0,$$

d.h. $c=0$ ist die einzige Lösung.

Dabei sind die aufgeführten Konstanten k_{10} usw. sicher von Null verschieden.

Da der Radius R eines Kreises auf der Kugel, dessen Ebene parallel zur x, y-Ebene ist, mit dem Radius r in der Projektion vermöge

$$R=\frac{2r}{1+r^2} \tag{47}$$

verbunden ist, haben wir

$$\Sigma=R^{-2}. \tag{48}$$

Weiter ist mit (41), (43)

$$\frac{\varkappa_{10}}{\varkappa_{02}}=\frac{\Sigma_2^{-1}\bar{\varrho}_2-\Sigma_1^{-1}\bar{\varrho}_1}{k^2(\Sigma_2-\Sigma_1)}=-\frac{R_1^2R_2^2}{k^2}\cdot\frac{R_2^2\bar{\varrho}_2-R_1^2\bar{\varrho}_1}{R_2^2-R_1^2}, \tag{49}$$

so daß für

$$\frac{R_2^2\bar{\varrho}_2-R_1^2\bar{\varrho}_1}{R_2^2-R_1^2}\varepsilon>0$$

Gl. (45) gilt. Dann muß aber

$$A\equiv\frac{R_2^2(\varrho_2-1)-R_1^2(\varrho_1-1)}{R_2^2-R_1^2}=\frac{R_2^2\varrho_2-R_1^2\varrho_1}{R_2^2-R_1^2}-1>0 \tag{50}$$

sein. Für $A<0$ besteht entsprechend (46). Aus diesen Überlegungen ist ersichtlich, daß die zwei Hauptsätze auch in der Formulierung der Einleitung ausgesprochen werden können.

Literatur.

[1] Nitsche, Joachim: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. Arch. Math. **4**, 331—336 (1953) (Teil I); **6**, 13—17 (1955) (Teil II); **6**, 145—150 (1955) (Teil III). — [2] Nitsche, Johannes: Über die linearen Randwertprobleme eines quasilinearen elliptischen Differentialgleichungssystems. Math. Z. **61**, 336—347 (1954). — [3] Rembs, E.: Unverbiegbare offene Flächen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. **1930**, 123—133. — [4] Schauder, J.: Über den Zusammenhang zwischen Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Math. Ann. **106**, 661—721 (1932). — [5] Vekua, I. N.: Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typ und Randwertprobleme mit einer Anwendung auf die Theorie der Häute. Mat. Sbornik T 31 (72) **2**, 217—314 (1953).

Berlin-Dahlem, Mathematisches Institut der Freien Universität.

(Eingegangen am 2. März 1955.)

Itô, N.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 400—401 (1955)

Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen.

Von
Noboru Itô.

Kürzlich ist die Auflösbarkeit des Produkts von zwei abelschen Gruppen endlicher Ordnung bewiesen worden (Akizuki-Suzuki [1] S. 124, Huppert [2], Itô [3]). Genauere Ergebnisse sind für das Produkt von zwei zyklischen Gruppen von Wielandt [5] gefunden und von Huppert [2] und Itô [4] noch verschärft worden; dabei hat sich insbesondere ergeben, daß diese Gruppen metabelsch sind, d.h. eine abelsche Kommutatorgruppe besitzen. Die Beweise waren ziemlich schwierig. Hier geben wir einen sehr einfachen Beweis für den folgenden allgemeineren Satz:

Satz 1. *Jede (endliche oder unendliche) Gruppe, die sich als Produkt von zwei abelschen Untergruppen darstellen läßt, ist metabelsch.*

Beweis. Sei $G = AB$, worin A und B abelsch sind. Wir zeigen zunächst, daß die Elemente der Form $aba^{-1}b^{-1}$ mit $a \in A$, $b \in B$ die ganze Kommutatorgruppe G' von G erzeugen. Dazu genügt es zu zeigen, daß die Gesamtheit dieser Kommutatoren invariant gegen Ähnlichkeitstransformation mit allen $a' \in A$ und $b' \in B$ ist. In der Tat ist nun

$$a'\,aba^{-1}b^{-1}a'^{-1} = ab^*a^{-1}b^{*-1}, \tag{1}$$

$$b'\,aba^{-1}b^{-1}b'^{-1} = a^*ba^{*-1}b^{-1}, \tag{2}$$

wenn $a'ba'^{-1} = b^*a''$ und $b'ab'^{-1} = a^*b''$ gesetzt wird, was wegen $G = AB = BA$ gestattet ist.

Als zweites zeigen wir, daß alle Elemente der Form $aba^{-1}b^{-1}$ miteinander vertauschbar sind. Dies folgt aus den Gleichungen

$$b'\,a'aba^{-1}b^{-1}a'^{-1}b'^{-1} = a^*b^*a^{*-1}b^{*-1}, \tag{3}$$

$$a'b'aba^{-1}b^{-1}b'^{-1}a'^{-1} = a^*b^*a^{*-1}b^{*-1}, \tag{4}$$

welche durch Transformation von (1) mit b' und von (2) mit a' entstehen. Damit ist der Beweis beendet. Wir fügen noch eine Bemerkung über den Fall endlicher Gruppen hinzu.

Satz 2. *Die endliche Gruppe G sei das Produkt zweier abelscher Untergruppen A und B. (I) Ist $A \neq B$, so enthält G einen Normalteiler $U \neq G$, der A oder B umfaßt. (II) Ist $G \neq 1$, so enthält A oder B einen Normalteiler $N \neq 1$ von G.*

Beweis durch Induktion nach der Ordnung von G.

(I) Es sei M ein minimaler Normalteiler von G. Seine Ordnung ist wegen der Auflösbarkeit von G eine Primzahlpotenz p^α.

(a) Ist $AM \neq BM$, so haben wir in $G/M = (AM/M)\,(BM/M)$ eine Zerlegung von G/M vor uns, die die Voraussetzungen von (I) erfüllt. Nach der Induktionsannahme gibt es in G/M einen eigentlichen Normalteiler U/M, welcher etwa AM/M umfaßt. Ihm entspricht in G ein eigentlicher Normalteiler U, welcher A umfaßt.

(b) Ist $AM = BM$, so ist beides gleich G. Wir dürfen $A \cap B = 1$ annehmen; sonst wäre nämlich $D = A \cap B$ ein Normalteiler von G mit $AD \neq BD$ und es läge der schon erledigte Fall (a) vor. Aus $AM = BM = AB$ und $A \cap B = 1$ folgt nun, daß die Ordnung von G eine Potenz der Primzahl p ist. Wegen $A \neq B$ ist mindestens eine der beiden Gruppen, etwa A, von G verschieden. Dann ist jede maximale Untergruppe U von G, welche A umfaßt, ein Normalteiler der gewünschten Art.

(II) Wir können annehmen, daß $A \neq 1$, $B \neq 1$ und $A \neq B$ ist; denn sonst leistet $N = A$ oder $N = B$ das Gewünschte. Wir zeigen zunächst: *G enthält einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Normalteiler U, welcher A oder B umfaßt und ein Zentrum $Z \neq 1$ besitzt.*

(a) Im Fall $A \cap G' \neq 1$ können wir für U den Zentralisator von $A \cap G'$ wählen. U umfaßt A und nach Satz 1 auch G', ist also normal in G, und das Zentrum von U umfaßt $A \cap G'$. Entsprechend können wir im Fall $B \cap G' \neq 1$ schließen.

(b) Im Fall $A \cap G' = B \cap G' = 1$ wählen wir für U nach (I) einen Normalteiler $\neq G$, der etwa A umfassen möge und daher $\neq 1$ ist. U ist von der Form AB^*, wo B^* eine Untergruppe von B ist. Nach der Induktionsannahme enthält A oder B^* einen Normalteiler $L \neq 1$ von U. Da die Kommutatorgruppe U' in G' enthalten ist, folgt $A \cap U' = B \cap U' = 1$, also $L \cap U' = 1$. Daher ist L im Zentrum von U enthalten.

Wir führen nun den Beweis von (II) zu Ende. Der gewählte Normalteiler U von G enthalte etwa A; dann hat U die Form AB^*, wo B^* eine Untergruppe von B ist. Das von 1 verschiedene Zentrum Z von U hat die Form $Z = A^*B^{**}$, mit geeigneten Untergruppen $A^* \subseteq A$ und $B^{**} \subseteq B^*$. Ist $B^{**} \neq 1$, so ist B^{**} im Zentrum von G enthalten und wir können $N = B^{**}$ setzen. Ist aber $B^{**} = 1$, so ist Z in A enthalten und außerdem charakteristisch in U, also normal in G; dann erfüllt $N = Z$ die Behauptung (II).

Bemerkung. Ist $A \cap G' \neq 1$ oder $B \cap G' \neq 1$, so gilt die Aussage (II) auch ohne die Endlichkeitsvoraussetzung, da diese im Fall (IIa) nicht benutzt worden ist.

Literatur.

[1] Akizuki, Y., u. M. Suzuki: Höhere Algebra. I. (Japanisch, 1952). — [2] Huppert, B.: Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243—264 (1953). — [3] Itô, N.: Remarks on factorizable groups. Acta Sci. math. Szeged **14**, 83—84 (1951). — [4] Itô, N.: Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen. (Erscheint demnächst in Nagoya math. J.) — [5] Wielandt, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951).

Mathematisches Institut der Universität Nagoya (Japan).

(Eingegangen am 18. März 1955.)

Baer, R.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 402—437 (1955)

Nilgruppen.

Von
Reinhold Baer.

Unter einer Nilgruppe soll eine Gruppe verstanden werden, deren sämtliche zyklische Untergruppen nachinvariant im Sinne von H. Wielandt [1] sind. Es ist klar, daß Untergruppen und homomorphe Bilder von Nilgruppen wieder Nilgruppen sind. Tiefer liegt die Tatsache, daß eine Gruppe eine Nilgruppe ist, wenn sie Produkt von Normalteilern ist, die Nilgruppen sind [§ 3, Satz 1]; schärfer: eine Gruppe ist eine Nilgruppe, wenn sie von ihren nachinvarianten zyklischen Untergruppen erzeugt wird [§ 3, Zusatz 1]; und hieraus folgt, daß die Gesamtheit der nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugenden Elemente eine charakteristische Untergruppe ist, die sich als Verallgemeinerung der Fittingschen Untergruppe erweist.

Bringt man Endlichkeits- oder Kettenbedingungen ins Spiel, so erhält man überraschend scharfe Resultate: endlich viele nachinvariante zyklische Untergruppen erzeugen eine nachinvariante Untergruppe endlicher Klasse, deren sämtliche Untergruppen ebenfalls nachinvariante, endlich erzeugbare Untergruppen sind [§ 3, Satz 3]; und endlich viele endliche, zyklische, nachinvariante Untergruppen erzeugen eine endliche nilpotente nachinvariante Untergruppe [§ 3, Zusatz 2]. Daraus folgt insbesondere, daß die Elemente endlicher Ordnung in einer Nilgruppe eine charakteristische Untergruppe bilden, die direktes Produkt ihrer Primärkomponenten ist. — Andererseits ist die Zentrumsfaktorgruppe einer Nilgruppe endlich, wenn die Minimalbedingung von ihren nachinvarianten Untergruppen erfüllt wird [§ 6, Satz 2].

Enthält eine Gruppe eine von 1 verschiedene, Abelsche, nachinvariante Untergruppe, so ist die oben erwähnte umfassendste charakteristische Niluntergruppe auch von 1 verschieden; und es liegt nahe, diese Bemerkung bei der Untersuchung auflösbarer Gruppen zu benutzen. Dies geschieht in § 4 und § 7; und die so gewonnenen Resultate werden dann wieder zur Untersuchung der Nilgruppen benutzt; s. besonders § 5 und § 6.

Für vielerlei kritische Hinweise sind wir Herrn Dr. K. Gruenberg (London) dankbarst verpflichtet, der einen Entwurf dieser Arbeit gelesen hat.

Bezeichnungen.

$[a, b] = a^{-1} b^{-1} a b$.

$[A, B]$ ist die von den Kommutatoren $[a, b]$ mit a in A und b in B erzeugte Untergruppe.

$G' = [G, G]$, $G'' = [G', G']$, $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$.

${}^0G = G$, ${}^{n+1}G = [G, {}^nG]$.

$Z(G) =$ Zentrum von G.

$Z_0(G) = 1$, $Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z[G/Z_n(G)]$.

$\{A, B\}$ ist die von den Elementen a in A und den Elementen b in B erzeugte Untergruppe.

1. Die Grundbegriffe.

In diesem Abschnitt wollen wir die einfachsten Eigenschaften der Nilgruppen, die ständig benötigt werden, herleiten und insbesondere den Begriff der Nilgruppe mit den übrigen für uns wichtigen Nilpotenzbegriffen in Beziehung setzen.

Definition. *Die kanonische zu der Teilmenge T der Gruppe G gehörige Normalkette $N_i(T) = N_i(T; G)$ wird induktiv folgendermaßen definiert:*

$N_0(T) = G$ und $N_{i-1}(T)$ ist der kleinste T enthaltende Normalteiler von $N_i(T)$.

Ist T etwa die leere Menge, so sind alle $N_i(T) = 1$. Allgemein bilden die $N_i(T)$ eine absteigende Normalkette, die mit G beginnt und deren Glieder sämtlich T enthalten. Daß dies sogar die kürzeste Normalkette dieser Art ist, ist der Inhalt des folgenden

Lemma 1. *Ist T eine Teilmenge der Gruppe G, $U_0 = G$, U_{i+1} ein T enthaltender Normalteiler von U_i für $0 \leqq i$, so gilt $N_i(T) \leqq U_i$ für $0 \leqq i$.*

Beweis. Unsere Behauptung ist wegen $N_0(T) = G = U_0$ sicher für $i = 0$ wahr. Ist etwa schon $N_i(T) \leqq U_i$ für ein gewisses i nachgewiesen, so ist $N_i(T) \cap U_{i+1}$ ein T enthaltender Normalteiler von $N_i(T)$, da ja U_{i+1} ein Normalteiler der $N_i(T)$ umfassenden Untergruppe U_i ist. Der kleinste T enthaltende Normalteiler $N_{i+1}(T)$ von $N_i(T)$ ist also auch in $N_i(T) \cap U_{i+1}$ enthalten; und daraus folgt $N_{i+1}(T) \leqq U_{i+1}$, womit der induktive Beweis von Lemma 1 vollständig erbracht ist.

Lemma 2. *Ist T eine Teilmenge der Gruppe G und i positiv, so ist $N_i(T)$ das Produkt der zu $N_{i+1}(T)$ in $N_{i-1}(T)$ konjugierten Untergruppen.*

Denn jede zu $N_{i+1}(T)$ in $N_{i-1}(T)$ konjugierte Untergruppe ist ein Normalteiler von $N_i(T)$ und das Produkt dieser Normalteiler ist ein Normalteiler von $N_{i-1}(T)$.

Lemma 3. *Ist T eine nicht leere Teilmenge der Gruppe G, so ist $[G, T]$ ein Normalteiler von G, und $\{T, [G, T]\}$ ist der kleinste T enthaltende Normalteiler von G.*

Beweis. Sind x, y Elemente in G, ist t ein Element in T, so ist

$$x^{-1}[y, t]\, x = x^{-1} y^{-1} t^{-1} y t x = x^{-1} y^{-1} t^{-1} y x t t^{-1} x^{-1} t x = [y x, t]\, [x, t]^{-1}$$

ein Element in $[G, T]$, so daß also $x^{-1}[G, T]\, x \leqq [G, T]$ für jedes x in G gilt. Folglich ist $[G, T]$ ein Normalteiler von G. — Es ist klar, daß jeder T enthaltende Normalteiler von G auch $\{T, [G, T]\}$ enthält. Da aber $[G, T]$ ein Normalteiler von G ist, so ist sicher auch $\{T, [G, T]\}$ ein Normalteiler von G; und folglich ist $\{T, [G, T]\}$ der kleinste T enthaltende Normalteiler von G.

Definition. *Ist T eine nicht leere Teilmenge der Gruppe G, so wird die zu T gehörige Kommutatorenkette $K_i(T) = K_i(T; G)$ induktiv folgendermaßen definiert:*

$$K_0(T) = G, \quad K_{i+1}(T) = [K_i(T), T].$$

Man überzeugt sich durch eine naheliegende Induktion, daß $K_{i+1}(T) \leqq K_i(T)$ für jedes nichtnegative i gilt.

Folgerung 1. *Ist T eine nicht leere Teilmenge der Gruppe G und $0 \leqq i$, so ist $N_i(T) = \{T, K_i(T)\}$.*

Beweis. Da unsere Behauptung sicher für $i = 0$ gilt, so können wir annehmen, daß unsere Behauptung schon für ein gewisses nicht negatives i erwiesen ist. Es folgt aus Lemma 3, daß der kleinste T enthaltende Normalteiler von $N_i(T)$ die Form

$$N_{i+1}(T) = \{T, [N_i(T), T]\}$$

hat. Nun ist wegen unserer Induktionsannahme $N_i(T) = \{T, K_i(T)\}$ und wegen

$$[K_i(T), K_i(T)]\,[K_i(T), T] \leqq K_i(T)\,K_{i+1}(T) = K_i(T)$$

ist $K_i(T)$ ein Normalteiler von $N_i(T)$ und also $N_i(T) = \{T\}\,K_i(T)$. Dann wird aber

$$[N_i(T), T] = [K_i(T), T]\,[T, T] = K_{i+1}(T)\,[T, T];$$

und hieraus folgt sofort, daß

$$N_{i+1}(T) = \{T, [N_i(T), T]\} = \{T, K_{i+1}(T)\}$$

wird, womit unser Induktionsbeweis zu Ende geführt ist.

Definition. *Nachinvariante Untergruppen sind die Glieder der [endlichen] Normalketten.*

Man kann diesen — auf H. WIELANDT [1] zurückgehenden — Begriff auch folgendermaßen erklären: Die Klasse der nachinvarianten Untergruppen der Gruppe G ist die kleinste G enthaltende Klasse von Untergruppen von G, die mit irgendeiner Untergruppe auch alle ihre Normalteiler enthält. Die Wichtigkeit dieses Begriffes beruht auf seiner Transitivität; nachinvariante Untergruppen nachinvarianter Untergruppen sind nachinvariante Untergruppen.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften der nicht leeren Teilmenge T der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *T erzeugt eine nachinvariante Untergruppe von G.*

(2) *$\{T\} = N_j(T; G)$ für geeignetes j.*

(3) *$K_j(T; G) \leqq \{T\}$ für geeignetes j.*

Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus Lemma 1, während die Äquivalenz von (2) und (3) sich aus Folgerung 1 ergibt.

Ist U eine nachinvariante Untergruppe der Gruppe G, so gibt es wegen Satz 1 ganze Zahlen j derart, daß $U = N_j(U; G)$ ist; und unter diesen Zahlen

gibt es eine kleinste $d = d(U; G)$, die wir als den *Defekt der nachinvarianten Untergruppe U in der Gruppe G* bezeichnen werden. Wir bemerken, daß G die einzige nachinvariante Untergruppe vom Defekt 0 in G ist, und daß die von G verschiedenen Normalteiler von G unter den nachinvarianten Untergruppen dadurch ausgezeichnet sind, daß sie den Defekt 1 haben.

Zusatz. *Jede nachinvariante Torsionsuntergruppe liegt in einem Normalteiler ohne Elemente unendlicher Ordnung.*

Beweis. Ist T eine nachinvariante Torsionsuntergruppe von G, so folgt aus Satz 1, daß $N_j(T; G) = T$ [für geeignetes j] eine Torsionsgruppe ist. Sei nun $1 < i \leq j$ und bereits gezeigt, daß $N_i(T; G)$ eine Torsionsgruppe ist. Nach Lemma 2 ist $N_{i-1}(T; G)$ ein Produkt von Normalteilern, die in $N_{i-2}(T; G)$ zu der Torsionsgruppe $N_i(T; G)$ konjugiert sind. Produkte von Normalteilern ohne Elemente unendlicher Ordnung sind aber Torsionsgruppen. Also ist auch $N_{i-1}(T; G)$ eine Torsionsgruppe. Durch vollständige Induktion folgt nun, daß der [kleinste] T enthaltende Normalteiler $N_1(T; G)$ von G eine Torsionsgruppe ist.

Aus diesem Zusatz folgt insbesondere, daß *das Erzeugnis aller nachinvarianten Torsionsuntergruppen eine charakteristische Torsionsuntergruppe* ist. Siehe auch § 3, Zusatz 2, 3.

Definition. *G ist eine Gruppe endlicher Klasse, wenn $^cG = 1$ für geeignetes c gilt.*

Nilpotenz wird häufig mit endlicher Klasse identifiziert; wir werden jedoch den Ausdruck „Nilpotenz" für den umfassendsten zulässigen Begriff dieser Art reservieren; s. unten.

Folgerung 2. *Die nichtleere Teilmenge T der Gruppe G erzeugt dann und nur dann eine nachinvariante Untergruppe endlicher Klasse, wenn $K_t(T; G) = 1$ für geeignetes t gilt.*

Beweis. Ist zunächst $\{T\}$ nachinvariant, so existiert wegen Satz 1 eine $K_j(T; G) \leq \{T\}$ erfüllende ganze Zahl j. Ist überdies $\{T\}$ von endlicher Klasse, so existiert auch noch eine $^i\{T\} = 1$ erfüllende ganze Zahl i. Durch vollständige Induktion folgert man aber $K_{j+k}(T; G) \leq {}^k\{T\}$ aus $K_j(T; G) \leq \{T\}$, sodaß sich $K_{j+i}(T; G) = 1$ aus $^i\{T\} = 1$ ergibt. — Gibt es umgekehrt eine $K_t(T; G) = 1$ erfüllende ganze Zahl t, so ist $\{T\}$ nach Satz 1 eine nachinvariante Untergruppe von G. Durch vollständige Induktion zeigt man weiter $^n\{T\} \leq K_n(T; G)$, so daß insbesondere $^t\{T\} = 1$ aus $K_t(T; G) = 1$ folgt. Also ist $\{T\}$ eine nachinvariante Untergruppe endlicher Klasse von G.

Folgerung 3. *Jede Untergruppe einer Gruppe endlicher Klasse ist eine nachinvariante Untergruppe endlicher Klasse.*

Diese wohlbekannte Tatsache kann man etwa aus Folgerung 2 und der durch vollständige Induktion beweisbaren Ungleichung

$$K_n(T; G) \leq {}^nG$$

erschließen.

Hilfssatz 1. *Sind A und B Normalteiler der Gruppe G, so gilt*

$$^n(AB) \leq {}^nA \prod_{i+j=n-1} ({}^iA \cap {}^jB)\, {}^nB \quad \text{für} \quad 0 < n.$$

Dies folgt durch vollständige Induktion, wenn man nur die Ungleichungen

$$[A, {}^kB] \leq A \cap {}^kB,$$
$$[A, {}^iA \cap {}^jB] \leq [A, {}^iA] \cap [A, {}^jB] \leq {}^{i+1}A \cap {}^jB$$

bedenkt.

Lemma 4. *Produkte endlich vieler Normalteiler endlicher Klasse sind Normalteiler endlicher Klasse.*

Es genügt offenbar, dies für zwei Normalteiler A und B von endlicher Klasse nachzuweisen. Ist aber ${}^aA = 1 = {}^bB$, so ist auch ${}^{a+b}(AB) = 1$, wie sich aus Hilfssatz 1 ergibt, wenn man nur bedenkt, daß aus $i < a$ und $i + j = a + b - 1$ sofort $b - 1 < j$ oder $b \leq j$ folgt.

Hilfssatz 1 und Lemma 4 finden sich schon bei HIRSCH [1] und sind nur der Bequemlichkeit des Lesers wegen eingefügt.

Definition. *Die Gruppe G ist eine Nilgruppe, wenn jedes Element aus G eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt.*

Es ist ziemlich klar, daß Untergruppen und homomorphe Bilder von Nilgruppen wieder Nilgruppen sind. Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und ist sowohl G/N wie auch jede Untergruppe $\{N, g\}$ für g aus G eine Nilgruppe, so überzeugt man sich ohne Mühe, daß G selbst eine Nilgruppe ist. Dagegen kann man natürlich nicht zeigen, daß Erweiterungen von Nilgruppen durch Nilgruppen wieder Nilgruppen sind.

Aus Folgerung 2 ergibt sich weiter, daß G dann und nur dann eine Nilgruppe ist, wenn es zu jedem Element g aus G eine $K_n(g; G) = 1$ erfüllende Zahl $n = n(g; G)$ gibt.

Satz 2. *Produkte von Normalteilern endlicher Klasse sind Nilgruppen.*

Beweis. Ist G ein Produkt von Normalteilern endlicher Klasse, so ergibt sich aus Lemma 4, daß jedes Element aus G in einem Normalteiler endlicher Klasse enthalten ist. Da aber alle Untergruppen von Gruppen endlicher Klasse nachinvariant sind [Folgerung 3], und da die Nachinvarianz eine transitive Beziehung ist, so erzeugt jedes Element aus G eine nachinvariante Untergruppe von G, q. e. d.

In wesentlicher Verschärfung dieses Satzes 2 werden wir später [§ 3, Satz 1] zeigen, daß eine Gruppe eine Nilgruppe ist, wenn sie ein Produkt von Normalteilern ist, die ebenfalls Nilgruppen sind.

Aus dem Zusatz zu Satz 1 folgert man, daß die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in einer Nilgruppe eine charakteristische Torsionsuntergruppe ist. Man vgl. § 3, Zusatz 2, 3, wo dieses Resultat wesentlich verschärft wird.

Definition. *Bricht für jedes Elementepaar x, y aus der Gruppe G die durch die Formeln $x_0 = x$, $x_{i+1} = [x_i, y]$ induktiv abgeleitete Kommutatorenfolge nach endlich vielen Schritten mit 1 ab, so ist G eine* ENGELsche *Gruppe.*

Engelsche Gruppen sind von Gruenberg [1] und Plotkin [1] untersucht worden — der Name stammt von Gruenberg, während Plotkin diese Gruppen als Nilgruppen bezeichnet.

Satz 3. *Nilgruppen sind* Engelsche *Gruppen.*

In Nilgruppen existiert zu jedem g ein n derart, daß $K_n(G) = 1$ ist [Folgerung 2]; und dies ist eine viel schärfere Eigenschaft als die definierende Eigenschaft der Engelschen Gruppen.

Definition. *Die Gruppe G ist nilpotent, wenn jedes endliche homomorphe Bild einer Untergruppe von G [im üblichen Sinne] nilpotent ist.*

Für eine Diskussion dieses Begriffs vgl. Baer [3], [4].

Satz 4. (a) Engelsche *Gruppen sind nilpotent.*

(b) *Jede* Engelsche *Gruppe G hat folgende Eigenschaft:*

(b.E) *Ist $N \neq 1$ ein Normalteiler des homomorphen Bildes H einer Untergruppe von G, und ist h ein Element in H, so gibt es ein von 1 verschiedenes, mit h vertauschbares Element in N.*

(c) *Die Gruppe G ist dann und nur dann nilpotent, wenn sie folgende Eigenschaft hat:*

(c.N) *Sind x und y von 1 verschiedene Elemente teilerfremder Ordnung in dem endlichen homomorphen Bilde H einer Untergruppe von G, so enthält der kleinste x enthaltende Normalteiler von H ein von 1 verschiedenes, mit y vertauschbares Element.*

Bemerkung. Zassenhaus [1; p. 5] und Zorn [1] haben bereits auf die Nilpotenz endlicher Engelscher Gruppen hingewiesen; s. auch Kontorovič [1] und Schenkman [1].

Beweis. Da die Eigenschaft (c.N) offenbar ein Spezialfall der Eigenschaft (b.E) ist, so ergibt sich aus (b) und (c) die Nilpotenz Engelscher Gruppen, d.h. (a).

Ist H ein homomorphes Bild einer Untergruppe der Engelschen Gruppe G, so ist auch H engelsch, da ja Untergruppen und homomorphe Bilder Engelscher Gruppen ebenfalls engelsch sind. Ist $N \neq 1$ ein Normalteiler von H und h irgendein Element in H, so sei x_0 irgendein von 1 verschiedenes Element in N und die Elementenfolge x_i werde induktiv durch die Regel $x_{i+1} = [x_i, h]$ definiert. Da x_0 in dem Normalteiler N von H liegt, und da h zu H gehört, so sind alle x_i in N enthalten. Da H engelsch ist, so wird $x_i = 1$ für alle hinreichend großen i. Da aber $x_0 \neq 1$ ist, so existiert ein kleinstes positives k derart, daß $x_k = 1$ ist. Dann ist aber x_{k-1} ein von 1 verschiedenes, in N enthaltenes Element, das wegen $1 = x_k = [x_{k-1}, h]$ mit h vertauschbar ist; und damit ist die Gültigkeit von (b.E) nachgewiesen.

Elemente teilerfremder Ordnung in endlichen nilpotenten Gruppen sind bekanntlich miteinander vertauschbar; und daraus folgt die Notwendigkeit der Bedingung (c.N). — Es ist klar, daß Untergruppen und homomorphe Bilder von Gruppen mit der Eigenschaft (c.N) ebenfalls diese Eigenschaft (c.N) haben. Wäre Nilpotenz keine Folge von (c.N), so müßte es endliche,

nichtnilpotente Gruppen mit der Eigenschaft (c.N) geben; und unter diesen gibt es dann eine Gruppe W von minimaler Ordnung m. Jede echte Untergruppe von W hat dann kleinere Ordnung als W und hat die Eigenschaft (c.N), ist also nilpotent. Eine endliche Gruppe, deren sämtliche echte Untergruppen nilpotent sind, ist aber bekanntlich auflösbar; s. O. SCHMIDT [1] oder IWASAWA [1]. Ist M ein minimaler Normalteiler von W, so ist also M abelsch; und daraus folgt die Existenz einer $M^p=1$ erfüllenden Primzahl p. Da die Ordnung von W/M kleiner als m ist, und da W/M auch die Eigenschaft (c.N) hat, so ist W/M nilpotent. Sei nun w ein Element aus W, dessen Ordnung zu p teilerfremd ist. Ist $S=\{M, w\}$, so besteht $M\cap Z(S)$ genau aus den mit w vertauschbaren Elementen in M, da ja M abelsch ist. Aus (c.N) folgt also $M\cap Z(S)\neq 1$, so daß die Ordnung von $S/Z(S)$ kleiner als die von S und W ist. Da die Eigenschaft (c.N) nicht nur von W, sondern auch von der Untergruppe S von W und von dem homomorphen Bild $S/Z(S)$ von S erfüllt wird, so ergibt sich aus der Minimalität von m, daß $S/Z(S)$ nilpotent ist; und daraus folgt die Nilpotenz von S. Da $M^p=1$ und die Ordnung von w zu p teilerfremd ist, so folgt aus der Nilpotenz von $S=\{M, w\}$, daß w mit jedem Element aus M vertauschbar ist. Damit haben wir gezeigt, daß die Elemente in M mit allen Elementen teilerfremder Ordnung aus W vertauschbar sind; uns daraus folgt bekanntlich $M\leq Z(W)$, da ja M ein minimaler Normalteiler der endlichen Gruppe W ist; s. etwa BAER [2; § 4, Proposition 1]. Aus der bereits erwähnten Nilpotenz von W/M folgt nun die Nilpotenz von W; und dies ist der gesuchte Widerspruch. Also sind alle Gruppen mit der Eigenschaft (c.N) nilpotent, q. e. d.

Definition. *Die Gruppe G ist obernilpotent, wenn $Z(H)\neq 1$ für jedes homomorphe Bild $H\neq 1$ von G gilt.*

Für eine Diskussion dieses Begriffs vgl. etwa BAER [2], [3], [4] oder KUROŠ [1; Chapter XV, 63]. Es ist in unserem Zusammenhang nicht ohne Interesse, daß obernilpotente Gruppen G durch die folgende Eigenschaft charakterisiert werden können:

(0) *Sind x_i, y_i Elemente aus G derart, daß $x_{i+1}=[x_i, y_i]$ für jedes positive i gilt, so ist $x_i=1$ für wenigstens ein [und also für fast alle] i.*

Für den einfachen Beweis vgl. KUROŠ [1, p. 404, Lemma].

Weiter läßt sich ohne große Mühe zeigen, daß Untergruppen und homomorphe Bilder obernilpotenter Gruppen ebenfalls obernilpotent sind, daß Gruppen endlicher Klasse obernilpotent sind, und daß jede obernilpotente Gruppe auch engelsch ist. Dagegen gilt:

Nicht jede obernilpotente Gruppe ist eine Nilgruppe.

Ist nämlich A eine ABELsche Gruppe vom PRÜFERschen Typus p^∞ [die also von Elementen a_i erzeugt wird, die den Bedingungen $1=a_0^p$, $a_i=a_{i+1}^p$ genügen], so entstehe die Gruppe G aus A durch Adjunktion eines Elementes b, das die Bedingung $b^{-1}ab=a^{1+p}$ für jedes a aus A erfüllt. Diese Gruppe G

ist offenbar obernilpotent, aber keine Nilgruppe, da ja G der kleinste b enthaltende Normalteiler von G ist.

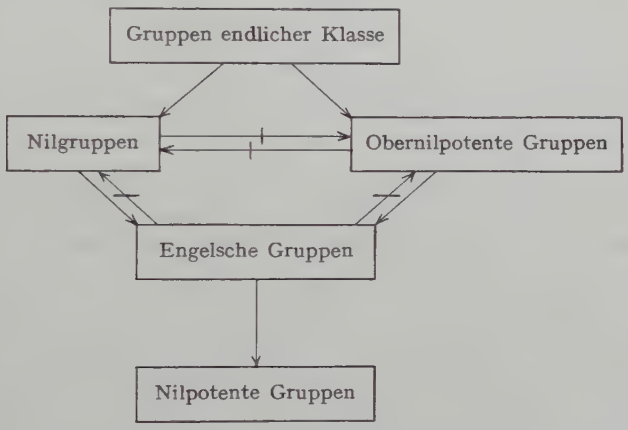
Nicht jede Nilgruppe ist obernilpotent.

Es gibt nämlich unendliche Gruppen G, die den Bedingungen

$$1 = Z(G) = G'' = G'^{p} = (G/G')^{p} \quad \text{für eine Primzahl } p$$

genügen; s. etwa Baer [*1*; p. 412, Example 3.4]. Solche Gruppen G sind natürlich nicht obernilpotent; aber sie sind Produkte von Normalteilern, die G' als Untergruppe von endlichem Index enthalten und von endlicher Klasse sind. Derartige Gruppen sind aber nach Satz 2 Nilgruppen.

Das folgende Diagramm möge diese Beziehungen zwischen den verschiedenen hier auftretenden Begriffen verdeutlichen.



2. Endlich erzeugbare Gruppen.

In diesem Abschnitt stellen wir die im folgenden benötigten Hilfsmittel aus der Theorie der endlich erzeugbaren Gruppen zusammen. Einige der Resultate sind neu und von unabhängigem Interesse.

Lemma 1. *Ist G eine endlich erzeugbare Gruppe und S eine Untergruppe von endlichem Index $[G:S]$ in G, so ist auch S endlich erzeugbar.*

Die Konstruktion eines endlichen Erzeugendensystems von S erfolgt mit Hilfe der Methode von Schreier-Reidemeister. Für Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe haben wir dies an anderer Stelle ausgeführt; siehe Baer [*1*; p. 396, (1.3)]. Der allgemeine Fall wird dann auf diesen Spezialfall zurückgeführt, indem man bemerkt, daß nach dem Poincaréschen Satz der Durchschnitt der zu S konjugierten Untergruppen ein in S enthaltener Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe ist.

Lemma 2. *Eine endlich erzeugbare, unendliche Gruppe besitzt ein unendliches homomorphes Bild, dessen echte homomorphe Bilder sämtlich endlich sind.*

Siehe Baer [*2*, § 1, Lemma 1].

Lemma 3. *Ist G eine endlich erzeugbare Gruppe, so läßt sich jedes ${}^iG$ von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugen.*

Einen Beweis dieses Satzes haben wir implizite an anderer Stelle gegeben; s. BAER [2; § 8, Theorem, insbesondere (1) bis (4)]. Wir deuten die Hauptpunkte dieses Beweises kurz an, der im wesentlichen eine Anwendung von PH. HALLs Kommutatorsammelprozeß ist. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G ergibt sich zunächst die Existenz eines endlichen Erzeugendensystems E von G, das mit e auch stets e^{-1} enthält. Man definiere dann die Teilmengen $E(i)$ von G induktiv durch die folgenden Regeln:

$E(0)=E$ und $E(i+1)$ besteht aus allen Kommutatoren $[f, e]$ mit f in $E(i)$ und e in E.

Es ist klar, daß mit E auch jedes $E(i)$ endlich ist; und man zeigt, daß

$$ {}^iG=\{E(i), E(i+1), \ldots, E(i+j), \ldots\} $$

ist. Daraus folgt aber, daß ${}^iG$ von den Elementen erzeugt wird, die zu den endlich vielen Elementen in $E(i)$ konjugiert sind, d.h. ${}^iG$ wird von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt.

Lemma 4. *Ist die endlich erzeugbare Gruppe G nicht von endlicher Klasse, so existiert ein homomorphes Bild H von G, das ebenfalls nicht von endlicher Klasse ist, während jedes echte homomorphe Bild von H von endlicher Klasse ist.*

Beweis. Wir bezeichnen mit Σ die Gesamtheit der Normalteiler N von G, deren Faktorgruppe G/N nicht von endlicher Klasse ist. Nach Voraussetzung ist $N=1$ in Σ enthalten. Ist nun Θ eine nichtleere Teilmenge von Σ derart, daß $X\leqq Y$ oder $Y\leqq X$ für alle X, Y in Θ gilt, so ist die Vereinigungsmenge J von Θ selbst ein Normalteiler von G. Gehörte nun J nicht zu Σ, so wäre G/J von endlicher Klasse und es existierte eine positive Zahl j derart, daß ${}^j(G/J)=1$ oder ${}^jG\leqq J$ ist. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G und Lemma 3 folgern wir die Existenz endlich vieler Klassen $K_1, \ldots, K_n$ in G konjugierter Elemente, die zusammen ${}^jG$ erzeugen, d.h. ${}^jG=\{K_1, \ldots, K_n\}$. Ist g ein Element in K_i, so ist g ein Element in ${}^jG\leqq J$; und es gibt also einen g enthaltenden Normalteiler N_i in Θ. Dieser Normalteiler N_i enthält aber mit g die ganze Klasse K_i zu g in G konjugierter Elemente. Unter den endlich vielen Normalteilern $N_1, \ldots, N_n$ aus Θ gibt es aber einen umfassendsten N, da ja Θ natürlich geordnet ist. Dann enthält aber N alle N_i und also auch alle K_i, so daß ${}^jG\leqq N$ und G/N von endlicher Klasse ist. Das widerspricht aber unserer Konstruktion der Menge Σ, der ja N angehört. Damit haben wir gezeigt, daß auch J zu Σ gehört; und wir sehen, daß das Maximumprinzip der Mengenlehre auf Σ angewandt werden kann. Ist aber M ein maximaler Normalteiler in Σ, so ist $H=G/M$ nicht von endlicher Klasse, während jedes echte homomorphe Bild von H von endlicher Klasse ist, q. e. d.

Lemma 5. *Enthält das endliche Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_e$ der Gruppe G mit x_i auch stets x_i^{-1}, so wird die Kommutatorgruppe G' von G von den Kommutatoren $[\ldots[[x_i, x_j], x_{n_1}], \ldots, x_{n_k}]$ mit $0\leqq k$ und $1\leqq n_1\leqq\cdots\leqq n_k\leqq e$ erzeugt.*

Beweis. Wir beginnen mit der Zusammenstellung einer Reihe wohlbekannter Formeln, die wir ständig benützen werden. Sind a, b, c Gruppenelemente, so ist

$$[a, bc] = [a, c]\,[a, b]\,[[a, b], c], \tag{1}$$

$$[ab, c] = [a, c]\,[[a, c], b]\,[b, c], \tag{2}$$

$$c^{-1}[a, b]\,c = [a, b]\,[[a, b], c] = [a, c]^{-1}[a, bc]. \tag{3}$$

Die nächste Formel folgt aus (1) und (2) durch eine einfache Rechnung, deren Hauptschritt wir andeuten:

$$\left\{\begin{aligned} & c^{-1}[a, b]\,c = [c^{-1}ac, c^{-1}bc] = [a[a, c], b[b, c]] \\ & \quad = [a, [b, c]]\,[[a, [b, c]], [a, c]]\,[[a, c], [b, c]]\,[a, b] \times \\ & \qquad \times [[a, b], [a, c]]\,[[a, c], b]\,[[a, b]\,[[a, b], [a, c]], [b, c]] \times \\ & \qquad \times [[[a, b]\,[[a, b], [a, c]], [b, c]], [[a, c], b]]\,[[[a, c], b], [b, c]]. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ist k eine nicht negative ganze Zahl und sind $i, j, n_1, \ldots, n_k$ zwischen 1 und e gelegene ganze Zahlen, so setzen wir zur Abkürzung:

$$[i, j; n_1, \ldots, n_k] = [\ldots[[x_i, x_j], x_{n_1}], \ldots, x_{n_k}].$$

Ist m nicht negativ und $0 \leqq n \leqq e$, so sei $H(m, n)$ die von den Kommutatoren

$$[i, j; n_1, \ldots, n_k] \quad \text{mit} \quad 0 \leqq k \leqq m \quad \text{und} \quad 1 \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_k \leqq n$$

erzeugte Untergruppe von G [und G'].

$$x_r^{-1} H(m, n)\, x_r \leqq H\big(m+1,\ \max(n, r)\big). \tag{5}$$

Wir werden diese Formel durch vollständige Induktion hinsichtlich m beweisen. Ist zunächst $m = 0$, so ist $H(0, n)$ unabhängig von der Wahl von n die von den sämtlichen Kommutatoren $[i, j] = [x_i, x_j]$ erzeugte Untergruppe von G. Wegen (3) ist aber

$$x_r^{-1}[i, j]\, x_r = [i, j]\,[[i, j], x_r] = [i, j]\,[i, j; r]$$

sicher in $H(1, r)$ enthalten, so daß

$$x_r^{-1} H(0, n)\, x_r \leqq H(1, r) \leqq H\big(1, \max(n, r)\big)$$

gilt, womit (5) für $m = 0$ bewiesen ist. Wir können und wollen also die Induktionsannahme machen, daß (5) bereits für ein gewisses nicht negatives m bewiesen ist. Aus dieser Induktionsannahme wollen wir die Ungleichung

$$x_r^{-1} H(m+1, n)\, x_r \leqq H\big(m+2, \max(n, r)\big) \tag{$m+1, r$}$$

durch vollständige Induktion hinsichtlich $e - r$ herleiten. Die Gültigkeit von $(m+1, e)$ ergibt sich mühelos aus der wegen (3) geltenden Identität

$$x_e^{-1}[i, j; n_1, \ldots, n_k]\, x_e = [i, j; n_1, \ldots, n_k]\,[i, j; n_1, \ldots, n_k, e],$$

wenn man nur $n_k \leqq n \leqq e$ bedenkt. Wir können und wollen also die Gültigkeit von $(m+1, s)$ für jedes $r < s \leqq e$ erfüllende s annehmen, um daraus die Gültigkeit von $(m+1, r)$ herzuleiten. Zu diesem Zweck betrachten wir eine der „kanonischen" Erzeugenden

$$t = [i, j; n_1, \ldots, n_k] \quad \text{mit} \quad 0 \leqq k \leqq m+1 \quad \text{und} \quad 1 \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_k \leqq n$$

von $H(m+1, n)$; und wir erinnern an die aus (3) folgende Gleichung

$$x_r^{-1} t x_r = t[t, x_r] = t[i, j; n_1, \ldots, n_k, r].$$

Ist $k < m+1$, so gehört t zu $H(m, n)$ und es folgt aus der ersten Induktionsannahme, daß $x_r^{-1} t x_r$ zu

$$x_r^{-1} H(m, n)\, x_r \leqq H\big(m+1, \max(n, r)\big) \leqq H\big(m+2, \max(n, r)\big)$$

gehört. Wir werden also im folgenden annehmen, daß $k = m+1$ ist. Ist weiter $n_{m+1} \leqq r$, so ist $[i, j; n_1, \ldots, n_k, r]$ — wie auch t — eine der „kanonischen" Erzeugenden von $H(m+2, r) \leqq H\big(m+2, \max(n, r)\big)$. Wir können also im folgenden auch annehmen, daß $r < n_{m+1}$ ist.

Wir erinnern daran, daß $t = [i, j; n_1, \ldots, n_{m+1}]$ ist; und setzen zur Abkürzung $a = [i, j; n_1, \ldots, n_m]$, $b = x_{n_{m+1}}$ und $c = x_r$. Dann wird

$$t = [a, b] \quad \text{und} \quad x_r^{-1} t x_r = c^{-1}[a, b]\, c.$$

Um nachzuweisen, daß dieses letzte Element in $H\big(m+2, \max(n, r)\big)$ enthalten ist, wollen wir verifizieren, daß jeder der in (4) auftretenden Faktoren in $H\big(m+2, \max(n, r)\big)$ liegt.

$[a, b] = t$ ist eine der „kanonischen" Erzeugenden von $H(m+1, n)$ und $[b, c] = [n_{m+1}, r]$ liegt in $H(0, n)$. Da a eine der „kanonischen" Erzeugenden von $H(m, n)$ ist, so folgt aus der ersten Induktionsannahme, daß $x_r^{-1} a x_r$ zu $x_r^{-1} H(m, n)\, x_r \leqq H\big(m+1, \max(n, r)\big)$ gehört; und folglich liegt auch $[a, c] = a^{-1} x_r^{-1} a\, x_r$ in $H\big(m+1, \max(n, r)\big)$. Die drei Kommutatoren $[a, b]$, $[b, c]$ und $[a, c]$ liegen also insbesondere in $H\big(m+2, \max(n, r)\big)$.

Da a eine „kanonische" Erzeugende von $H(m, n)$ ist und $[b, c]$ in $H(0, n)$ liegt, so gehört $[a, [b, c]]$ zu $H(m, n) \leqq H\big(m+2, \max(n, r)\big)$.

Aus $r < n_{m+1} \leqq n$ folgern wir weiter, daß $\max(n, r) = n$ ist, und daß aus der zweiten Induktionsannahme die Gültigkeit von $(m+1, n_{m+1})$ folgt. Da aber $[a, c]$ in $H(m+1, n)$ liegt, so gehört $b^{-1}[a, c]\, b$ zu

$$x_{n_{m+1}}^{-1} H(m+1, n)\, x_{n_{m+1}} \leqq H\big(m+2, \max(n, n_{m+1})\big) = H(m+2, n);$$

und $[[a, c], b] = [a, c]^{-1} b^{-1} [a, c]\, b$ ist folglich auch in $H(m+2, n)$ enthalten.

Da die Kommutatoren zweier zu einer Untergruppe gehörenden Elemente ebenfalls dieser Untergruppe angehören, so ergibt sich aus dem eben gezeigten, daß jeder der in Formel (4) auftretenden Faktoren zu $H(m+2, n) = H\big(m+2, \max(n, r)\big)$ gehört; und folglich liegt auch $c^{-1}[a, b]\, c = x_r^{-1} t\, x_r$ in $H\big(m+2, \max(n, r)\big)$. Da aber die Elemente t die „kanonischen" Erzeugenden von $H(m+1, n)$ sind, so haben wir die Gültigkeit

der Ungleichung $(m+1, r)$ dargetan. Damit ist der induktive Nachweis aller Ungleichungen $(m+1, i)$ mit $1 \leqq i \leqq e$ voll erbracht; und damit haben wir auch (5) für $m+1$ erwiesen. Die Ungleichungen (5) sind also induktiv voll bewiesen.

Unter H wollen wir nun die von den Kommutatoren

$$[i, j; n_1, \ldots, n_k] \quad \text{mit} \quad 0 \leqq k \quad \text{und} \quad 1 \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_k \leqq e$$

erzeugte Untergruppe von G [und G'] verstehen. Es ist klar, daß H das Erzeugnis der vorher betrachteten Untergruppen $H(m, n)$ ist. Aus (5) folgt also

$$x_i^{-1} H x_i \leqq H$$

für jedes i. Da aber $x_i^{-1} = x_j$ für geeignetes j [nach Voraussetzung] ist, so gilt entsprechend

$$x_i H x_i^{-1} = x_j^{-1} H x_j \leqq H \quad \text{oder} \quad H \leqq x_i^{-1} H x_i.$$

Also ist sogar $H = x_i^{-1} H x_i$ für jedes i. Da die Gruppe G von den Elementen x_i erzeugt wird, so ist also H ein in G' enthaltener Normalteiler von G. Da jeder der Kommutatoren $[x_i, x_j]$ in H liegt, so ist G/H abelsch, so daß $G' \leqq H \leqq G'$ oder $H = G'$ gilt, q. e. d.

Gruenberg [1] weist darauf hin, daß sich Lemma 5 auch durch den Ph. Hallschen Kommutatorsammelprozeß beweisen ließe.

3. Nachinvariante Niluntergruppen.

Die Frage, ob die von zwei nachinvarianten Untergruppen erzeugte Untergruppe ebenfalls nachinvariant ist, ist bekanntlich noch unentschieden. Wielandt hat in seiner grundlegenden Arbeit [1] zeigen können, daß dies wenigstens in Gruppen gilt, von deren nachinvarianten Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird. Wir wollen hier einige Beiträge zu dieser Frage liefern, die für die Theorie der Nilgruppen wichtig sind.

Wir beginnen mit einer vorläufigen Diskussion der Gruppen endlicher Klasse mit Maximalbedingung.

Lemma 1. *Die folgenden Eigenschaften der obernilpotenten Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *G ist endlich erzeugbar.*

(2) *Jede Untergruppe von G ist endlich erzeugbar.*

(3) *Die Maximalbedingung wird von den Normalteilern von G erfüllt.*

Für einen Beweis dieses Satzes vgl. Baer [4; p. 322, § 5, Satz 1].

Es ist wohlbekannt, daß dann und nur dann jede Untergruppe von G endlich erzeugbar ist, wenn die Maximalbedingung von den Untergruppen von G erfüllt wird; und wir wollen Gruppen mit dieser Eigenschaft als Noetherſche *Gruppen* bezeichnen.

Lemma 2. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *G ist eine* NOETHERsche *Gruppe endlicher Klasse.*

(2) *G ist eine endlich erzeugbare Nilgruppe.*

(3) *G wird von seinen nachinvarianten zyklischen Untergruppen erzeugt und jedes ${}^iG$ ist endlich erzeugbar.*

Bemerkung 1. Wir werden später zeigen, daß G eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse ist, wenn G von endlich vielen zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt wird. Dieses Resultat macht natürlich das Lemma 2 überflüssig; doch wird beim Beweis dieses schärferen Resultats — und auch an anderen Stellen — von Lemma 2 wesentlicher Gebrauch gemacht.

Beweis. Es ist klar, daß (2) aus (1) folgt [§ 1, Satz 2]. — Ist G eine endlich erzeugbare Nilgruppe, so wird G selbstverständlich von den zyklischen nachinvarianten Untergruppen von G erzeugt. Wir zeigen weiter durch vollständige Induktion die endliche Erzeugbarkeit einer jeden Ableitung $G^{(n)}$. Für $n=0$ ist dies genau unsere Voraussetzung. Haben wir etwa schon die endliche Erzeugbarkeit von $H=G^{(n)}$ dargetan, so besitzt H ein endliches Erzeugendensystem $h_1, \ldots, h_e$, das mit h_i auch h_i^{-1} enthält. Jedes der h_i erzeugt eine zyklische nachinvariante Untergruppe von G [und H]; und wir folgern aus § 1, Folgerung 2 [oder § 1, Satz 3], daß jedes h_i die ENGELsche Eigenschaft hat:

(E) Zu jedem Element h in H gibt es eine positive ganze Zahl $m=m(h)=m(h, h_i)$ derart, daß $[\ldots[h, h_i], \ldots, h_i]=1$ ist, wo das Element h_i genau m mal auftritt.

Durch eine einfache Anwendung von § 2, Lemma 5 ergibt sich nun die endliche Erzeugbarkeit der Kommutatorgruppe $G^{(n+1)}$ von $G^{(n)}$, womit der induktive Nachweis der endlichen Erzeugbarkeit aller Ableitungen $G^{(i)}$ von G voll erbracht ist. Also ist insbesondere jede Faktorgruppe $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ als endlich erzeugbare ABELsche Gruppe noethersch; und hieraus folgt durch vollständige Induktion, daß jede Faktorgruppe $G/G^{(n)}$ der Maximalbedingung für Untergruppen genügt. Da aber $G^{(n)} \leq {}^nG$ ist, so ist auch ${}^nG/G^{(n)}$ endlich erzeugbar; und die endliche Erzeugbarkeit von ${}^nG$ folgt aus der von $G^{(n)}$ und ${}^nG/G^{(n)}$. Also ist (3) eine Folge von (2). — Für dieses Resultat und seine Herleitung vgl. GRUENBERG [*1*; Theorem 2].

Ist G endlich erzeugbar, so ist $G/{}^nG$ eine endlich erzeugbare Gruppe endlicher Klasse; und es folgt aus Lemma 1, daß jede Untergruppe von $G/{}^nG$ endlich erzeugbar ist. Ist überdies ${}^nG$ endlich erzeugbar, so ergibt sich hieraus die endliche Erzeugbarkeit einer jeden ${}^nG$ enthaltenden Untergruppe von G. Aus (3) können wir also die folgende Eigenschaft erschließen:

(a) *Jede ein ${}^iG$ enthaltende Untergruppe von G ist endlich erzeugbar.*

Eine endlich erzeugbare Gruppe, die von ihren zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt wird, wird bereits von endlich vielen zyklischen nach-

invarianten Untergruppen erzeugt; und die Defekte dieser endlich vielen zyklischen nachinvarianten Untergruppen sind beschränkt. Also existiert zu jeder (3) erfüllenden Gruppe G eine Zahl n mit folgender Eigenschaft:

(b.n) *G wird von den zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt, deren Defekt in G höchstens gleich n ist.*

Wir wollen nun Gruppen mit den Eigenschaften (a) und (b.n), die nicht von endlicher Klasse sind, als *$c-n$-Gruppen* bezeichnen. Endlich erzeugbare Gruppen endlicher Klasse sind NOETHERsch [Lemma 1]. Wäre also (1) keine Folge von (3), so gäbe es $c-n$-Gruppen für wenigstens ein [positives] n; und unter diesen Zahlen n existiert auch eine kleinste, die wir mit m bezeichnen wollen. Da G die einzige nachinvariante Untergruppe vom Defekt 0 in G ist, so ist m sicher positiv; und wir bemerken weiter, daß es eine $c-m$-Gruppe T gibt, während es keine $c-i$-Gruppen mit $i<m$ gibt.

Da die endlich erzeugbare Gruppe T nicht von endlicher Klasse ist, so existiert nach § 2, Lemma 4 ein homomorphes Bild H von T, das gleichfalls nicht von endlicher Klasse ist, während jedes echte homomorphe Bild von H eine Gruppe endlicher Klasse ist. Da jeder Homomorphismus von T auf H die Untergruppe ${}^iT$ auf die Untergruppe ${}^iH$ abbildet, so hat H die Eigenschaft (a); und da nachinvariante zyklische Untergruppen, deren Defekt m nicht überschreitet, durch Homomorphismen auf nachinvariante zyklische Untergruppen abgebildet werden, deren Defekt in der Bildgruppe m nicht überschreitet, so hat H auch die Eigenschaft (b.m). Folglich ist H eine $c-m$-Gruppe.

Aus (b.m) ergibt sich die Existenz endlich vieler Elemente h_i mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$H=\{h_1,\ldots,h_k\};$$

jedes $\{h_i\}$ ist eine nachinvariante Untergruppe von H, deren Defekt in H höchstens gleich m ist.

Ist $H_i=N_1(h_i;H)$ der kleinste h_i enthaltende Normalteiler von H, so ist H das Produkt dieser endlich vielen Normalteiler H_i. Wäre jedes H_i von endlicher Klasse, so folgte aus § 1, Lemma 4, daß die $c-m$-Gruppe H von endlicher Klasse ist, was natürlich unmöglich ist. Also gibt es ein j derart, daß H_j nicht von endlicher Klasse ist. Dann ist H_j insbesondere nicht zyklisch, so daß $\{h_j\}<H_j$ wird und $\{h_j\}$ kein Normalteiler von H ist. Für den Defekt d von $\{h_j\}$ in H gilt also $1<d\leq m$. Es ist klar, daß $\{h_j\}$ eine nachinvariante Untergruppe von H_j ist, deren Defekt in H_j höchstens $d-1$ ist; s. § 1, Satz 1. Anwendung von § 1, Lemma 2 ergibt dann, daß H_j die Eigenschaft (b.$d-1$) hat.

Sei U eine ${}^iH_j$ enthaltende Untergruppe von H_j. Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers H_j von H ist ${}^iH_j$ ein Normalteiler von H. Da H_j nicht von endlicher Klasse ist, so ist ${}^iH_j\neq 1$. Also ist $H/{}^iH_j$ ein echtes homomorphes Bild von H und als solches ist $H/{}^iH_j$ von endlicher Klasse. Mithin existiert eine ${}^r(H/{}^iH_j)=1$ erfüllende ganze Zahl r. Dann wird aber

$${}^rH\leq {}^iH_j\leq U;$$

und wir können aus (a) die endliche Erzeugbarkeit von U erschließen. Also hat H_j auch die Eigenschaft (a), so daß H_j eine $c-(d-1)$-Gruppe ist. Wegen $1 \leqq d-1 < m$ widerspricht dies der minimalen Wahl von m. Unsere Annahme, daß (1) keine Folge von (3) ist, hat uns zu einem Widerspruch geführt, q. e. d.

Lemma 3. *Wenn N eine nachinvariante Untergruppe der Gruppe G ist, und wenn das Element g aus dem Normalisator von N in G eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt, dann ist $\{N, g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G.*

Beweis. Aus der Nachinvarianz von N in G folgt die Existenz von Untergruppen U_i von G derart, daß $U_0 = N$, U_i ein Normalteiler von U_{i+1} und $U_n = G$ ist. Wir setzen

$$D_i = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} g^{-j} U_i g^j.$$

Da g im Normalisator von $N = U_0$ liegt, so ist auch

$$N = U_0 = D_0.$$

Weiter ist klar, daß $D_i \leqq D_{i+1}$ und $D_n = G$ ist. Weiter liegt g im Normalisator aller D_i. Ist t ein Element in D_{i+1}, so liegt auch $g^j t g^{-j}$ in $D_{i+1} \leqq U_{i+1}$. Da aber U_i ein Normalteiler von U_{i+1} ist, so ist also jedes $g^j t g^{-j}$ im Normalisator von U_i enthalten. Folglich wird

$$\begin{aligned} t^{-1} D_i t &= \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} t^{-1} g^{-j} U_i g^j t \\ &= \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} g^{-j} (g^j t g^{-j})^{-1} U_i (g^j t g^{-j}) g^j \\ &= \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} g^{-j} U_i g^j = D_i. \end{aligned}$$

Da folglich g und D_{i+1} im Normalisator von D_i enthalten sind, so ist D_i ein Normalteiler von $\{D_{i+1}, g\}$. Da $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G ist, so ist $\{g\}$ auch eine nachinvariante Untergruppe von $\{D_{i+1}, g\}$ und $\{D_i, g\}/D_i$ ist folglich eine nachinvariante Untergruppe von $\{D_{i+1}, g\}/D_i$. Mithin ist $\{D_i, g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von $\{D_{i+1}, g\}$ und aus der Transitivität der Nachinvarianz folgern wir schließlich, daß $\{N, g\} = \{D_0, g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von $G = \{D_n, g\}$ ist, q. e. d.

Lemma 4. *Wenn der Normalteiler N der Gruppe G eine Nilgruppe ist, und wenn es ein $G = \{N, g\}$ erfüllendes Element g in G gibt, das eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt, dann ist G eine Nilgruppe.*

Beweis. Ist x ein Element in G, so hat x die Form $x = y g^i$ mit y in N, da ja N ein Normalteiler von G ist und die zyklische Faktorgruppe G/N von der Restklasse Ng erzeugt wird. Die Untergruppe $X = \{x, g\}$ wird also auch von den vier Elementen y, y^{-1}, g, g^{-1} erzeugt. Da N eine Nilgruppe ist, so ist $\{y\}$ eine nachinvariante Untergruppe von N und also auch von G. Da $\{y\}$ und $\{g\}$ nachinvariante Untergruppen von G sind, so folgt aus § 1,

Folgerung 2 [oder § 1, Satz 3], daß jedes der Elemente y, y^{-1}, g, g^{-1} die Engelsche Eigenschaft hat; und [wie beim ersten Teil des Beweises von Lemma 2] folgern wir nun aus § 2, Lemma 5, daß die Kommutatorgruppe X' von X ebenfalls endlich erzeugbar ist. Aus $X/(N\cap X) \sim NX/N \leq G/N$ folgt, daß $X/(N\cap X)$ mit G/N eine zyklische Gruppe ist, so daß insbesondere $X' \leq N\cap X \leq N$ ist. Also ist X' eine endlich erzeugbare Nilgruppe, da N nach Voraussetzung eine Nilgruppe ist; und nun folgt aus Lemma 2, daß X' eine Noethersche Gruppe endlicher Klasse ist. Da X endlich erzeugbar ist, so ist X/X' als endlich erzeugbare Abelsche Gruppe Noethersch und folglich ist die Erweiterung X der Noetherschen Gruppe X' durch die Noethersche Gruppe X/X' ebenfalls Noethersch. Da aber X von den nachinvarianten Untergruppen $\{y\}$ und $\{g\}$ von G erzeugt wird, so ist X eine Gruppe, deren sämtliche Untergruppen endlich erzeugbar sind, und die von ihren zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt wird. Aus Lemma 2 ergibt sich, daß X eine Noethersche Gruppe endlicher Klasse ist.

Wir bemerken, daß y in $N\cap X$ liegt, und daß also $X=\{N\cap X, g\}$ ist. Da $N\cap X$ ein Normalteiler der Noetherschen Gruppe X endlicher Klasse ist, so existieren Untergruppen X_i von X mit folgenden Eigenschaften:

$1=X_0$, X_i ist ein Normalteiler von X_{i+1} und X_{i+1}/X_i ist zyklisch, $X_n=N\cap X$.

Es gibt also Elemente x_i derart, daß $X_{i-1}=\{X_i, x_i\}$ ist. Da jedes x_i in dem Normalteiler N von G liegt, der eine Nilgruppe ist, so erzeugt jedes x_i eine nachinvariante Untergruppe von G; und da X_i ein Normalteiler von X_{i+1} ist, so liegt x_i im Normalisator von X_i. Aus Lemma 3 folgt nun durch eine naheliegende Induktion, daß jedes X_i eine nachinvariante Untergruppe von G ist. Also ist auch $X\cap N$ eine nachinvariante Untergruppe von G. Da $X=\{X\cap N, g\}$ ist, da g eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt und im Normalisator von $X\cap N$ liegt, so ist X nach Lemma 3 eine nachinvariante Untergruppe von G. Da X von endlicher Klasse ist, so ist jede Untergruppe von X eine nachinvariante Untergruppe von X [§ 1, Folgerung 3]. Aus der Transitivität der Nachinvarianz folgt schließlich, daß $\{x\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G ist. Also ist G eine Nilgruppe, q. e. d.

Satz 1. *Produkte von Normalteilern, die Nilgruppen sind, sind ebenfalls Nilgruppen.*

Beweis. Ist jeder der Normalteiler A und B der Gruppe G eine Nilgruppe, so wollen wir zunächst zeigen, daß auch der Normalteiler AB von G eine Nilgruppe ist. Ist g ein Element aus AB, so gibt es Elemente a und b in A bzw. B derart, daß $g=ab$. Da $\{b\}$ eine nachinvariante Untergruppe des Normalteilers B von G ist, so ist $\{b\}$ auch eine nachinvariante Untergruppe von AB und $\{Ab\}=\{A, b\}/A$ ist eine nachinvariante zyklische Untergruppe von AB/A. Folglich ist auch $\{A, b\}=\{A, g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von AB [und G]. Da der Normalteiler A von $\{A, g\}$ eine Nilgruppe ist, und da $\{b\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G und also auch von $\{A, b\}=\{A, g\}$ ist, so ergibt sich aus Lemma 4, daß $\{A, b\}=\{A, g\}$ eine

Nilgruppe ist. Also ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe der nachinvarianten Untergruppe $\{A, g\}$ von AB; und aus der Transitivität der Nachinvarianz folgt, daß $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von AB ist. Also ist AB eine Nilgruppe.

Sind $N_1, \ldots, N_k$ endlich viele Normalteiler von G und ist jedes N_i eine Nilgruppe, so folgern wir durch eine naheliegende Induktion aus dem Ergebnis des ersten Abschnitts dieses Beweises, daß auch das Produkt $N_1 \ldots N_k$ eine Nilgruppe ist.

Sei schließlich Θ eine Menge von Normalteilern der Gruppe G und sei jeder Normalteiler in Θ eine Nilgruppe. Ist g ein Element im Produkt P aller Normalteiler in Θ, so gibt es endlich viele Normalteiler $T_1, \ldots, T_k$ in Θ derart, daß g bereits dem Produkt $T = T_1 \ldots T_k$ angehört. Wir haben aber im vorigen Abschnitt dieses Beweises gezeigt, daß ein solches Produkt T eine Nilgruppe ist. Also ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe des Normalteilers T von G und mithin auch eine nachinvariante Untergruppe von G und von P. Folglich ist P eine Nilgruppe, q. e. d.

Definition. *$R(G)$ ist die Gesamtheit der nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugenden Elemente in der Gruppe G.*

Satz 2. *$R(G)$ ist eine charakteristische Niluntergruppe von G.*

Bemerkung 2. Da $R(G)$ offenbar das Erzeugnis aller nachinvarianten Niluntergruppen von G ist, so ist $R(G)$ *eine Verallgemeinerung der* FITTING*schen Untergruppe*, die für endliche Gruppen als Produkt aller nilpotenten Normalteiler definiert wird, und mit der $R(G)$ im endlichen Falle [wegen § 1, Satz 3, 4] übereinstimmt.

Bemerkung 3. Satz 1 und Lemma 4 sind als Spezialfälle in Satz 2 enthalten.

Beweis. Ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G, so ist $\{g\} = N_n(g; G)$ für geeignetes positives n [§ 1, Satz 1]. Also ist $N_n(g; G)$ insbesondere eine Nilgruppe. Ist $1 < i \leq n$, und haben wir bereits gezeigt, daß $N_i(g; G)$ eine Nilgruppe ist, so bemerken wir, daß $N_{i-1}(g; G)$ das Produkt der zu $N_i(g; G)$ in $N_{i-2}(g; G)$ konjugierten Normalteiler ist [§ 1, Lemma 2]. Als Produkt von Normalteilern, die sämtlich Nilgruppen sind, ist $N_{i-1}(g; G)$ ebenfalls eine Nilgruppe [Satz 1]. Aus diesem induktiven Beweis folgt insbesondere, daß der kleinste g enthaltende Normalteiler $N_1(g; G)$ von G eine Nilgruppe ist.

Das Produkt aller $N_1(g; G)$ mit g in $R(G)$ ist also ein Produkt P von Normalteilern, die Nilgruppen sind; und als solches ist P ebenfalls eine Nilgruppe [Satz 1]. Nach Definition ist $R(G) \leq P$. Ist aber x ein Element in P, so ist $\{x\}$ eine nachinvariante Untergruppe der Nilgruppe P; und da P ein Normalteiler ist, so ist $\{x\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G, so daß x zu $R(G)$ gehört und $P \leq R(G)$ ist. Damit ist $P = R(G)$ gezeigt, q. e. d.

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften der Untergruppe U von G sind untereinander äquivalent:*

(1) *U ist eine nachinvariante* NOETHERsche *Untergruppe endlicher Klasse.*

(2) *U ist das Erzeugnis endlich vieler, endlich erzeugbarer, nachinvarianter Niluntergruppen.*

(3) *U ist endlich erzeugbar und in $R(G)$ enthalten.*

Beweis. Gruppen endlicher Klasse sind Nilgruppen [§ 1, Satz 2]; und also folgt (2) aus (1). — Daß (3) aus (2) folgt, ergibt sich aus der Transitivität der Nachinvarianz und der Definition von $R(G)$, sowie der Tatsache, daß $R(G)$ eine Untergruppe ist [Satz 2].

Ist U endlich erzeugbar und in $R(G)$ enthalten, dann ist U eine endlich erzeugbare Nilgruppe und also eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse [Lemma 2]. Mithin existieren endlich viele Untergruppen U_i von U mit folgenden Eigenschaften:

$1 = U_0$, U_i ist ein Normalteiler von U_{i+1} und U_{i+1}/U_i ist zyklisch, $U_n = U$.

Es gibt also Elemente r_i derart, daß $U_{i+1} = \{U_i, r_i\}$ ist. Da U_i ein Normalteiler von U_{i+1} ist, so liegt r_i im Normalisator von U_i; und da r_i der Untergruppe U von $R(G)$ angehört, so erzeugt r_i eine nachinvariante Untergruppe von G. Durch eine naheliegende Induktion erschließt man nun aus Lemma 3, daß jedes U_i und also auch $U_n = U$ eine nachinvariante Untergruppe von G ist. Also ist (1) eine Folge von (3), q. e. d.

Bemerkung 4. Die Unentbehrlichkeit der Endlichkeitsannahmen in Satz 3, (2) ergibt sich aus folgender Betrachtung, die auch zeigen wird, daß die Vereinigung einer aufsteigenden Folge nachinvarianter Untergruppen nicht nachinvariant zu sein braucht:

Es sei F_n eine Gruppe der Klasse n, die eine zyklische Untergruppe T_n vom genauen Defekt n besitzt — man kann etwa $F_n = F/{}^nF$ wählen, wo F eine nichtkommutative freie Gruppe ist. Weiter sei G das direkte Produkt aller F_n, $U_n = T_1 \dots T_n$ und U die Vereinigung der aufsteigenden Kette der U_n. Jedes U_n und auch U ist abelsch. Weiter ist jedes U_n eine nachinvariante Untergruppe vom genauen Defekt n, so daß U nicht nachinvariant sein kann. Andererseits ist $U \leqq R(G)$ und jedes Element in U erzeugt eine nachinvariante Untergruppe von G. Schließlich sei erwähnt, daß $G = R(G)$ obernilpotent ist.

Zusatz 1. *G ist dann und nur dann eine Nilgruppe, wenn G von seinen nachinvarianten zyklischen Untergruppen erzeugt wird.*

Folgt ohne weiteres aus Satz 2.

Zusatz 2. *Endlich viele Elemente endlicher Ordnung, die nachinvariante zyklische Untergruppen erzeugen, erzeugen eine endliche, nilpotente, nachinvariante Untergruppe.*

Dies folgt leicht aus Satz 3, wenn man sich nur daran erinnert, daß endlich viel Elemente endlicher Ordnung in einer obernilpotenten Gruppe — also auch in einer Gruppe endlicher Klasse — eine endliche nilpotente Gruppe erzeugen; s. etwa BAER [2; § 6, Theorem 1, (v)].

Zusatz 3. *Die Elemente endlicher Ordnung in einer Nilgruppe bilden eine charakteristische Untergruppe, die direktes Produkt von Primärgruppen ist.*

Dies ergibt sich sofort aus Zusatz 2 und den wohlbekannten Eigenschaften endlicher nilpotenter Gruppen, da ja Untergruppen von Nilgruppen ebenfalls Nilgruppen sind.

Nilgruppen ohne torsionsfreie Faktorgruppen sind [wegen Zusatz 3] stets Torsionsgruppen.

4. Auflösbarkeit.

Es ist klar, daß bei der Diskussion nilpotenter Gruppen allerlei Auflösbarkeitsbegriffe eine Rolle spielen werden. Die verschiedenen für unsere Anwendungen wichtigen Möglichkeiten sollen hier aufgezählt und erörtert werden.

Definition. *Die Gruppe G ist auflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen, ABELschen Normalteiler besitzt.*

Es ist klar, daß G sicher dann auflösbar ist, wenn $G^{(k)} = 1$ für geeignetes positives k gilt, während aus der bloßen Auflösbarkeit von G noch nicht auf die Existenz einer solchen ganzen Zahl k geschlossen werden kann. — Weiter macht man sich klar, daß Untergruppen und homomorphe Bilder auflösbarer Gruppen ebenfalls auflösbar sind.

Satz 1. *Die Gruppe G ist dann und nur dann auflösbar, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:*

(A) *Sind x_i, y_i Elemente aus G derart, daß $x_{i+1} = [x_i, [x_i, y_i]]$ für jedes positive i gilt, so ist $x_i = 1$ für wenigstens ein [und also für fast alle] i.*

Man vergleiche dieses Kriterium mit § 1, (0).

Beweis. Enthielte die auflösbare Gruppe G von 1 verschiedene Elemente x_i, y_i derart, daß $x_{i+1} = [x_i, [x_i, y_i]]$ für $i = 1, 2, \ldots$ gilt, so gibt es einen maximalen, keines der x_i enthaltenden Normalteiler M von G. Dann ist sicher G/M ein von 1 verschiedenes homomorphes Bild von G; und aus der Auflösbarkeit von G folgt die Existenz eines

$$N' \leq M < N$$

erfüllenden Normalteilers N von G. Wegen der Maximalität von M liegt x_n in N für wenigstens ein n. Da N ein Normalteiler von G ist, so enthält N auch den Kommutator $[x_n, y_n]$, so daß $x_{n+1} = [x_n, [x_n, y_n]]$ in $N' \leq M$ liegt, was unserer Wahl von M widerspricht. Also folgt (A) aus der Auflösbarkeit von G.

Erfüllt umgekehrt G die Bedingung (A), so gilt dasselbe von allen homomorphen Bildern von G. Angenommen nun es gäbe ein homomorphes Bild $H \neq 1$ von G, das keinen ABELschen Normalteiler besitzt. Ist $h \neq 1$ ein Element in H, so wird der kleinste, h enthaltende Normalteiler $N = N_1(h; H)$ von H von h und den Kommutatoren $[h, x]$ mit x in H erzeugt [§ 1, Lemma 3]. Da N nicht abelsch ist, so gibt es ein h' derart, daß $[h, [h, h']] = [h, h'^{-1} h h'] \neq 1$ ist; und nun ist es klar, wie man eine die Bedingung (A) verletzende Elementenfolge h_i, h_i' in H konstruieren kann. Also folgt die Auflösbarkeit von G aus (A), q. e. d.

Definition. *Die Gruppe G ist charakteristisch-auflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild von G eine von 1 verschiedene,* ABELsche *charakteristische Untergruppe besitzt.*

Es ist klar, daß charakteristisch-auflösbare Gruppen auch auflösbar sind, daß aus $G^{(k)}=1$ auf die charakteristische Auflösbarkeit von G geschlossen werden kann, während man aus der charakteristischen Auflösbarkeit von G nicht auf die Existenz einer $G^{(k)}=1$ erfüllenden Zahl k schließen kann.

Die eventuelle Wichtigkeit dieses Begriffs ergibt sich aus folgenden leicht verifizierbaren Bemerkungen: Ist G/N auflösbar und N charakteristisch-auflösbar, so ist G auflösbar; und Produkte charakteristisch-auflösbarer Normalteiler sind auflösbar.

Wichtiger für uns ist die folgende Abschwächung des Auflösbarkeitsbegriffs.

Definition. *Die Gruppe G ist nachauflösbar, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild von G eine von 1 verschiedene,* ABELsche, *nachinvariante Untergruppe besitzt.*

Es ist klar, daß auflösbare Gruppen auch nachauflösbar sind, und daß homomorphe Bilder nachauflösbarer Gruppen ebenfalls nachauflösbar sind. Die Wichtigkeit des Begriffs der Nachauflösbarkeit für unsere Zwecke beruht auf der [trivialen] Bemerkung, daß Nilgruppen stets nachauflösbar sind.

Aus der Transitivität der Nachinvarianz folgert man ohne große Mühe, daß Erweiterungen nachauflösbarer Gruppen durch nachauflösbare Gruppen wieder nachauflösbar sind; und ebenso sieht man leicht, daß Produkte nachauflösbarer Normalteiler nachauflösbar sind. Etwas tiefer liegt die folgende Tatsache:

Untergruppen nachauflösbarer Gruppen sind nachauflösbar.

Beweis. Sei nämlich N ein Normalteiler der Untergruppe S der nachauflösbaren Gruppe G und $N \neq S$. Dann existiert ein maximaler, $M \cap S \leqq N$ erfüllender Normalteiler M von G; und wir folgern $M<G$ aus $N<S$. Die Gesamtheit $R(G/M)$ der nachinvariante [zyklische] Untergruppen von G/M erzeugenden Elemente in G/M ist eine charakteristische Untergruppe von G/M [§ 3, Satz 2]; und aus $G/M \neq 1$ und der Nachauflösbarkeit von G folgt $R(G/M) \neq 1$. Ist Q die eindeutig bestimmte, $Q/M = R(G/M)$ erfüllende Untergruppe von G, so ist Q ein Normalteiler von G und $M<Q$. Aus der Maximalität von M folgt also $Q \cap S \nleqq N$ oder $N<N(Q \cap S)$. Mithin ist $N(Q \cap S)/N$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von S/N. Weiter ist

$$N(Q \cap S)/N \simeq (Q \cap S)/(N \cap Q \cap S) = (Q \cap S)/(Q \cap N)$$
$$\simeq [(Q \cap S)/(M \cap S)]/[(Q \cap N)/(M \cap S)],$$

da ja $M \cap S$ ein in N enthaltener Normalteiler von S und $M<Q$ ist; und

$$(Q \cap S)/(M \cap S) = (Q \cap S)/(M \cap Q \cap S) \simeq M(Q \cap S)/M \leqq Q/M = R(G/M).$$

Da aber $R(G/M)$ eine Nilgruppe ist [§ 3, Satz 2], so ist auch das homomorphe Bild $N(Q \cap S)/N$ der Untergruppe $M(Q \cap S)/M$ von $R(G/M)$ eine Nilgruppe,

so daß jedes Element aus dem Normalteiler $N(Q \cap S)/N$ von S/N eine nachinvariante Untergruppe von S/N erzeugt. Da aber $N(Q \cap S)/N \neq 1$ ist, so ist damit die Existenz von von 1 verschiedenen, zyklischen, nachinvarianten Untergruppen von S/N dargetan, so daß also S nachauflösbar ist, q. e. d.

Lemma 1. *Jede von 1 verschiedene,* ABELsche, *nachinvariante Untergruppe von minimalem Defekt in der Gruppe G ist ein Normalteiler von G, wenn jede nachinvariante Untergruppe $U \neq 1$ von G, die ein Produkt* ABELscher *Normalteiler von U ist, eine von 1 verschiedene,* ABELsche, *charakteristische Untergruppe [von U] besitzt.*

Bemerkung 1. Ob von 1 verschiedene Produkte ABELscher Normalteiler stets von 1 verschiedene, ABELsche, charakteristische Untergruppen besitzen, scheint eine offene Frage zu sein. Wir geben zwei für unsere Anwendungen wichtige hinreichende Bedingungen an:

A. Ist $U \neq 1$ ein Produkt endlich vieler ABELscher Normalteiler, so ist U von endlicher Klasse [§ 1, Lemma 4] und also $Z(U) \neq 1$.

B. Enthält das Produkt U ABELscher Normalteiler einen minimalen ABELschen Normalteiler M, so ist M in jedem maximalen ABELschen Normalteiler von U enthalten. Da aber U auch das Produkt seiner maximalen ABELschen Normalteiler ist, so ist $1 < M \leq Z(U)$.

Beweis. Es sei A eine von 1 verschiedene, ABELsche, nachinvariante Untergruppe von G, deren Defekt d minimal ist. Wäre nun A kein Normalteiler von G, so wäre $1 < d$; und wir folgerten aus § 1, Satz 1, daß $A = N_d(A; G)$ ist, und daß $N_{d-1}(A; G)$ nach § 1, Lemma 2 das Produkt der zu A in $N_{d-2}(A; G)$ konjugierten ABELschen Normalteiler von $N_{d-1}(A; G)$ ist. Aus $A \neq 1$ und unserer Voraussetzung folgern wir weiter die Existenz einer von 1 verschiedenen, ABELschen, charakteristischen Untergruppe C von $N_{d-1}(A; G)$, da ja die $N_i(A; G)$ nachinvariante Untergruppen sind. Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers N_{d-1} von N_{d-2} ist C ein Normalteiler von $N_{d-2}(A; G)$; und nun folgt aus § 1, Lemma 1, daß der Defekt der nachinvarianten Untergruppe C von G höchstens $d-1$ ist. Da aber $C \neq 1$ abelsch ist, so widerspricht dies der Minimalität von d. Folglich ist A ein Normalteiler von G, q. e. d.

Satz 2. *Die Begriffe nachauflösbar, auflösbar und charakteristisch-auflösbar decken sich für Gruppen G mit der folgenden Eigenschaft:*

(+) *Ist die nachinvariante Untergruppe $U \neq 1$ eines homomorphen Bildes von G ein Produkt* ABELscher *Normalteiler [von U], so existiert eine von 1 verschiedene,* ABELsche, *charakteristische Untergruppe von U.*

Beweis. Ist zunächst G eine (+) erfüllende nachauflösbare Gruppe und $H \neq 1$ ein homomorphes Bild von G, so existieren von 1 verschiedene, ABELsche [sogar zyklische] nachinvariante Untergruppen von H und unter diesen ABELschen nachinvarianten Untergruppen $\neq 1$ gibt es eine A von minimalem Defekt. Anwendung von (+) und Lemma 1 zeigt, daß A ein Normalteiler von H ist. Also ist G auflösbar.

Sei zweitens G eine (+) erfüllende auflösbare Gruppe und $H \neq 1$ ein homomorphes Bild von G. Das Produkt P aller ABELschen Normalteiler von H ist

eine charakteristische Untergruppe von H und $P \neq 1$ folgt aus der Auflösbarkeit von G. Aus (+) erschließen wir weiter die Existenz einer von 1 verschiedenen, ABELschen, charakteristischen Untergruppe C von P. Als charakteristische Untergruppe einer charakteristischen Untergruppe ist C eine charakteristische Untergruppe von H; und damit ist gezeigt, daß G charakteristisch auflösbar ist.

Schließlich ist jede charakteristisch-auflösbare Gruppe auch nachauflösbar, womit die Äquivalenz unserer drei Begriffe für (+) erfüllende Gruppen dargetan ist.

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *G ist* NOETHERsch *und $G^{(n)} = 1$ für geeignetes n.*

(2) *Die Maximalbedingung wird von den* ABELschen *Untergruppen von G erfüllt und G ist nachauflösbar.*

(3) *Ist N eine nachinvariante Untergruppe eines homomorphen Bildes von G, so wird die Maximalbedingung von den Normalteilern von N erfüllt; und G ist nachauflösbar.*

(4) *Jedes $G^{(i)}$ ist endlich erzeugbar und G ist nachauflösbar.*

Bemerkung 2. Das Hinreichen der Bedingung (2) ist eine Verschärfung eines schönen Satzes von MALCEW [*1*], von dem wir auch beim Beweise Gebrauch machen werden; s. unten.

Beweis. Es ist klar, daß jede der Bedingungen (2), (3), (4) eine Folge von (1) ist. — Beim Beweise, daß (1) aus (2) folgt, werden wir den folgenden MALCEWschen Satz wiederholt anwenden:

MALCEWscher Satz. *Ist G eine auflösbare Gruppe, von deren* ABELschen *Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird, so ist G* NOETHERsch *und $G^{(n)} = 1$ für geeignetes n.*

Einen Beweis dieses MALCEWschen Satzes in der hier angegebenen Form findet man etwa bei BAER [*5*]; dort auch weitere Literaturangaben.

Ist nun G eine (2) erfüllende Gruppe, so bilden wir zunächst das Produkt P aller auflösbaren Normalteiler von G. Ist weiter A irgendeine auflösbare Untergruppe von G, so wird [nach Voraussetzung (2)] die Maximalbedingung von den ABELschen Untergruppen von A erfüllt; und aus dem MALCEWschen Satz ergibt sich die folgende Verschärfung der Bedingung (2).

(2.a) Ist A eine auflösbare Untergruppe von G, so ist A NOETHERsch und es gibt eine ganze Zahl $n = n(A)$ derart, daß $A^{(n)} = 1$ ist.

Ist N ein von P verschiedener Normalteiler von P, so ergibt sich aus der Definition von P die Existenz eines nicht in N enthaltenen, auflösbaren Normalteilers X von G. Natürlich ist dann $N < NX \leq P$; und aus (2.a) erschließen wir die Existenz einer $X^{(i)} = 1$ erfüllenden ganzen Zahl i. Da $X = X^{(0)}$ nicht in N enthalten ist, während $1 = X^{(i)}$ in N liegt, so gibt es eine positive Zahl j derart, daß

$$X^{(j)} \leq N < NX^{(j-1)} \leq P$$

gilt; und aus den Isomorphiesätzen folgern wir

$$NX^{(j-1)}/N \simeq X^{(j-1)}/(X^{(j-1)} \cap N) \simeq [X^{(j-1)}/X^{(j)}]/[(X^{(j-1)} \cap N)/X^{(j)}].$$

Da die $X^{(k)}$ als charakteristische Untergruppen des Normalteilers X von G selbst Normalteiler von G sind, so ist $NX^{(j-1)}/N$ ein von 1 verschiedener, ABELscher Normalteiler von P/N. Damit haben wir gezeigt:

(2.b) P ist auflösbar.

Wir wenden (2.a) auf (2.b) an und finden:

(2.c) P ist NOETHERsch und $P^{(n)} = 1$ für geeignetes n.

Ist A/P eine ABELsche Untergruppe von G/P, so ist $A' \leq P$ und $A^{(n+1)} = 1$ wegen (2.c). Also ist A auflösbar und wegen (2.a) NOETHERsch. Daraus folgt:

(2.d) Jede ABELsche Untergruppe von G/P ist endlich erzeugbar.

Um Lemma 1 anwenden zu können, beweisen wir:

(2.e) Ist die Untergruppe $U \neq 1$ von G/P ein Produkt ABELscher Normalteiler [von U], so existiert eine von 1 verschiedene, ABELsche, charakteristische Untergruppe von U.

Um dies einzusehen, verifiziert man zunächst, daß U auflösbar ist. Wegen (2.d) können wir dann den MALCEWschen Satz auf U anwenden. Also gibt es eine ganze Zahl i derart, daß $U^{(i)} = 1$ ist. Wir wählen i minimal; und bemerken, daß i positiv ist, da $1 \neq U = U^{(0)}$ ist. Dann ist aber $U^{(i-1)}$ die gesuchte von 1 verschiedene, ABELsche, charakteristische Untergruppe von U.

Bisher haben wir noch keinen Gebrauch von der Nachauflösbarkeit von G gemacht. Wäre etwa $P < G$, so folgte aus der Nachauflösbarkeit von G die Existenz von 1 verschiedener, ABELscher [sogar zyklischer] nachinvarianter Untergruppen von $G/P \neq 1$; und unter diesen gibt es eine J von minimalem Defekt. Aus (2.e) und Lemma 1 folgt, daß J ein Normalteiler von G/P ist. Dann gibt es einen $J = W/P$ erfüllenden Normalteiler W von G; und dieser genügt den Ungleichungen

$$W' \leq P < W \leq G.$$

Aus (2.c) folgt weiter $W^{(n+1)} = 1$, so daß W ein auflösbarer Normalteiler von G ist. Also wird $P < W \leq P$, ein Widerspruch aus dem wir $P = G$ erschließen. Wegen (2.c) besagt dies, daß G der Bedingung (1) genügt.

Als nächstes nehmen wir an, daß G der Bedingung (3) genügt. Wären alle $G^{(i)} \neq 1$, so wäre die Menge Σ der kein $G^{(i)}$ enthaltenden Normalteiler von G nicht leer — 1 wäre ja sicher in Σ enthalten. Aus (3) folgt insbesondere, daß die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird; und folglich gibt es einen maximalen Normalteiler M in Σ. Es ist klar, daß $M < G$ ist; und aus der Nachauflösbarkeit von G folgern wir die Existenz einer von 1 verschiedenen, ABELschen, nachinvarianten Untergruppe N/M von minimalem Defekt in G/M. Aus (3) und Bemerkung 1, A erschließen wir die Anwendbarkeit von Lemma 1, so daß N/M ein Normalteiler von G/M ist. Also ist N ein

$$N' \leq M < N \leq G$$

erfüllender Normalteiler von G. Aus der Maximalität von M ergibt sich die Existenz einer $G^{(k)} \leqq N$ erfüllenden ganzen Zahl k. Dann ist aber

$$G^{(k+1)} \leqq N' \leqq M;$$

und dies widerspricht der Tatsache, daß M als Normalteiler in Σ keine der Ableitungen von G enthalten kann. Aus diesem Widerspruch folgt die Existenz einer $G^{(n)} = 1$ erfüllenden ganzen Zahl n.

Aus (3) ergibt sich, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen der ABELschen charakteristischen Untergruppe $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ von $G/G^{(i)}$ erfüllt wird; und nun sieht man sofort, daß G NOETHERsch und (1) eine Folge von (3) ist.

Schließlich wollen wir annehmen, daß Bedingung (4) von G erfüllt wird. Wäre keine der Ableitungen $G^{(i)} = 1$, so bilden wir wieder die dann nicht leere Menge Σ aller keine Ableitung $G^{(i)}$ enthaltenden Normalteiler von G. Es sei nun Θ eine nicht leere Teilmenge von Σ derart, daß $X \leqq Y$ oder $Y \leqq X$ für jedes Paar X, Y in Θ gilt. Die Vereinigungsmenge J der Normalteiler in Θ ist dann sicher auch ein Normalteiler von G. Wäre J nicht in Σ enthalten, so gäbe es eine $G^{(j)} \leqq J$ erfüllende ganze Zahl j. Wegen (4) ist $G^{(j)}$ endlich erzeugbar. Ist etwa $e_1, \ldots, e_k$ ein endliches Erzeugendensystem von $G^{(j)}$, so liegt jedes e_i in J und es gibt also ein E_i in Θ, das e_i enthält. Dann sind aber alle E_i in einem von ihnen enthalten, das wir E nennen wollen; und es ergibt sich, daß $G^{(j)}$ in E enthalten ist, was unmöglich ist, da E in Σ liegt. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß J zu Σ gehört, und daß also das Maximumprinzip der Mengenlehre auf Σ angewandt werden kann. Folglich gibt es einen maximalen Normalteiler M in Σ.

Natürlich ist $M < G$; und wir folgern aus der Nachauflösbarkeit von G, daß die Menge $R(G/M)$ aller zyklische nachinvariante Untergruppen von G/M erzeugenden Elemente nicht nur aus 1 besteht. Wegen § 3, Satz 2 ist $R(G/M)$ nicht nur eine Teilmenge, sondern sogar eine charakteristische Untergruppe von G/M. Es gibt also einen $M < N$ und $N/M = R(G/M)$ erfüllenden Normalteiler N von G. Aus der Maximalität von M erschließen wir die Existenz einer $G^{(i)} \leqq N$ erfüllenden ganzen Zahl i. Nach Voraussetzung (4) ist $G^{(i)}$ und also auch $MG^{(i)}/M = S$ endlich erzeugbar. Als Untergruppe der Nilgruppe $R(G/M)$ ist S eine endlich erzeugbare Nilgruppe; und es folgt aus § 3, Lemma 2, daß S von endlicher Klasse ist. Dann existiert insbesondere eine $S^{(j)} = 1$ erfüllende ganze Zahl j; und daraus erschließen wir $G^{(i+j)} \leqq M$, ein Widerspruch. Es gibt also eine $G^{(n)} = 1$ erfüllende ganze Zahl n. Da nach Voraussetzung (4) jede der ABELschen Gruppen $G^{(i+1)}/G^{(i)}$ endlich erzeugbar und also noethersch ist, so ist G selbst NOETHERsch; und wir haben (1) aus (4) hergeleitet, q. e. d.

Bemerkung 3. Es gibt bekanntlich Gruppen G, die von zwei Elementen erzeugt werden, $G'' = 1$ erfüllen, und deren Kommutatorgruppe G' nicht endlich erzeugbar ist. Also ist es unmöglich, (4) wesentlich abzuschwächen.

Lemma 2. *Wenn G auflösbar ist und die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird, dann ist G endlich erzeugbar und $G^{(n)} = 1$ für geeignetes n.*

Beweis. Wäre $G^{(n)} \neq 1$ für jedes n, so gäbe es einen maximalen Normalteiler M, der keines der $G^{(n)}$ enthielte. Da dann sicher $G/M \neq 1$ ist, so folgt aus der Auflösbarkeit von G die Existenz eines $N' \leq M < N$ erfüllenden Normalteilers N von G. Aus der Maximalität von M erschließen wir die Existenz einer $G^{(j)} \leq N$ erfüllenden ganzen Zahl j. Dann wird aber $G^{(j+1)} \leq N' \leq M$ im Widerspruch zu unserer Wahl von M. Also existiert eine $G^{(n)} = 1$ erfüllende ganze Zahl n. Wäre G nicht endlich erzeugbar, so gäbe es einen maximalen Normalteiler W mit nicht endlich erzeugbarer Faktorgruppe G/W. Da sicher $H = G/W \neq 1$ ist, so folgt aus der Auflösbarkeit von G die Existenz eines von 1 verschiedenen ABELschen Normalteilers A von H. Ist $b \neq 1$ ein Element in A, so ist der kleinste b enthaltende Normalteiler $N_1(b; H)$ von H in A enthalten und also abelsch. Aus $N_1(b; H) \neq 1$ und der Maximalität von W folgt die endliche Erzeugbarkeit von $H/N_1(b; H)$. Daraus entnehmen wir die Existenz einer endlich erzeugbaren, $H = N_1(b; H)E$ erfüllenden Untergruppe E von H. Aus der Kommutativität des Normalteilers $N_1(b; H)$ von H ergibt sich, daß jeder von einem inneren Automorphismus von H in $N_1(b; H)$ induzierte Automorphismus bereits von einem Element in E induziert wird, so daß insbesondere die zu b konjugierten Elemente aus H die Form $e^{-1}be$ mit e in E haben. Dann ist insbesondere $N_1(b; H) \leq \{E, b\}$, so daß $H = \{E, b\}$ endlich erzeugbar ist. Dies widerspricht unserer Wahl von W, woraus die endliche Erzeugbarkeit von G folgt, q. e. d.

Lemma 3. *G ist [dann und nur dann] eine nachauflösbare Torsionsgruppe, wenn jedes von 1 verschiedene homomorphe Bild von G eine von 1 verschiedene, endliche, zyklische, nachinvariante Untergruppe besitzt.*

Beweis. Es genügt offenbar nachzuweisen, daß G eine Torsionsgruppe ist, wenn G die in Lemma 3 angegebene Bedingung erfüllt. Unter den Normalteilern von G, die Torsionsgruppen sind, gibt es natürlich einen maximalen M. Die Gesamtheit R der Elemente in G/M, die nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugen ist eine charakteristische Untergruppe von G [§ 3, Satz 2]. Da R eine Nilgruppe ist, so bilden die Elemente endlicher Ordnung in R eine charakteristische Untergruppe von R und G/M [§ 3, Zusatz 3]. Dann existiert ein M enthaltender Normalteiler T von G derart, daß T/M die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung aus R ist. Da M und T/M Torsionsgruppen sind, ist auch T eine Torsionsgruppe. Aus der Maximalität von M folgt also $T = M$. Folglich enthält G/M keine Elemente endlicher Ordnung, die nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugen; und aus unserer Voraussetzung folgt $G/M = 1$, so daß $G = M$ eine Torsionsgruppe ist, q. e. d.

5. NOETHERsche Gruppen endlicher Klasse.

Auf Grund der bisherigen Untersuchungen können wir jetzt eine Reihe interessanter Charakterisierungen dieser Gruppenklasse gewinnen.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *G ist eine* NOETHERsche *Gruppe endlicher Klasse.*

(2) *G ist eine Nilgruppe; ist N eine nachinvariante Untergruppe eines homomorphen Bildes von G, so wird die Maximalbedingung von den Normalteilern von N erfüllt.*

(3) *G ist eine nilpotente und auflösbare Gruppe, von deren Normalteilern die Maximalbedingung erfüllt wird.*

(4) *G ist eine nilpotente, auflösbare und endlich erzeugbare Gruppe.*

(5) *G ist eine obernilpotente und endlich erzeugbare Gruppe.*

(6) *G ist eine* Engelsche, *nachauflösbare und endlich erzeugbare Gruppe.*

(7) *G ist eine nilpotente und nachauflösbare Gruppe, deren Ableitungen $G^{(i)}$ sämtlich endlich erzeugbar sind.*

(8) *G ist eine Nilgruppe, von deren* Abelschen *Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird.*

(9) *G ist eine nilpotente und nachauflösbare Gruppe, von deren* Abelschen *Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird.*

(10) *G ist eine endlich erzeugbare Nilgruppe.*

Bemerkung 1. Die Äquivalenz der Bedingungen (1), (5) und (10) ist schon in früheren Resultaten [§ 3, Lemma 1, 2] enthalten und hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Bemerkung 2. Wegen § 3, Zusatz 1 kann das Wort „Nilgruppe" überall durch „von zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugbare Gruppe" ersetzt werden.

Bemerkung 3. Wegen § 4, Satz 2 kann man Auflösbarkeit überall durch Nachauflösbarkeit zusammen mit einer Zusatzbedingung ersetzen.

Bemerkung 4. Gruenberg [*1*] und Plotkin [*1*] haben gezeigt, daß Engelsche endlich erzeugbare Gruppen sicher dann Noetherssche Gruppen endlicher Klasse sind, wenn sie eine [möglicherweise transfinite] aufsteigende Normalkette mit Abelschen Faktoren besitzen. Diese Voraussetzung ist schwächer als Auflösbarkeit und ihre Beziehung zur Nachauflösbarkeit noch ungeklärt. — Daß unser Resultat etwa Baer [*4*, § 2, Satz 2] verschärft, sei erwähnt.

Beweis. Es ist klar, daß (2) aus (1) folgt [§ 1; Satz 2]. Wird Bedingung (2) von G erfüllt, so ist G nachauflösbar und wegen § 4, Satz 3, (3) ist G auflösbar. G ist nilpotent wegen § 1, Satz 3, 4; und nun ist es klar, daß (3) aus (2) folgt. Wegen § 4, Lemma 2 folgt (4) aus (3).

Angenommen die Gruppe G erfüllte (4), aber nicht (1). Dann ergäbe sich aus § 3, Lemma 1, daß G nicht von endlicher Klasse ist; und wegen § 2, Lemma 4 existiert dann ein homomorphes Bild H von G, das nicht von endlicher Klasse ist, während jedes echte homomorphe Bild von H von endlicher Klasse ist. Aus der Auflösbarkeit von H folgt die Existenz eines Abelschen Normalteilers $A \neq 1$ von H. Dann ist H/A von endlicher Klasse als echtes homomorphes Bild von H. Da H endlich erzeugbar und nilpotent und eine Erweiterung des Abelschen Normalteilers A durch die Gruppe H/A endlicher Klasse ist, so ist H obernilpotent; s. Baer [*4*; § 2, Satz 1]. Also ist $Z(H) \neq 1$ und $H/Z(H)$ ist als echtes homomorphes Bild von H von endlicher Klasse.

Mithin existiert eine $^{i}[H/Z(H)]=1$ erfüllende ganze Zahl i, so daß $^{i}H \leqq Z(H)$ und $^{i+1}H=1$ wird. Das ist ein Widerspruch, aus dem sich ergibt, daß (1) eine Folge von (4) ist und also (1) bis (4) äquivalente Bedingungen sind.

Es ist klar, daß (5) aus (1) und (6) aus (5) folgt [§ 1, (0)]. Ist G eine endlich erzeugbare ENGELsche Gruppe, so ist G nilpotent [§ 1, Satz 4]; und die endliche Erzeugbarkeit aller Ableitungen $G^{(i)}$ folgt durch eine naheliegende Induktion aus § 2, Lemma 5. Also ist (7) eine Folge von (6). Aus (7) folgt die Auflösbarkeit von G wegen § 4, Satz 3, so daß (4) eine Folge von (7) ist; und damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (7) dargetan.

Es ist klar, daß (8) eine Folge der äquivalenten Bedingungen (1) bis (7) ist, und daß (9) aus (8) folgt [§ 1, Satz 3, 4]. Aus (9) ergibt sich durch Anwendung von § 4, Satz 3, (2), daß G eine NOETHERsche auflösbare Gruppe ist. Also folgt (4) aus (9); und damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (9) dargetan.

Wir haben schon auf die Äquivalenz von (10) und (1) [wegen § 3, Lemma 2] hingewiesen.

Für die folgenden Betrachtungen müssen wir an den Begriff der Hyperzentralität eines Normalteilers erinnern. Dieser Begriff kann durch eine Reihe äquivalenter Eigenschaften definiert werden; s. BAER [3; Definition 1 und Satz 3]. Die von uns hier gewählte Definition empfiehlt sich durch ihre Kürze.

Definition. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist ein hyperzentraler Normalteiler der Gruppe G, wenn $\{x, g\}$ für jedes x aus N und jedes g aus G nilpotent ist.*

Insbesondere sind also alle Normalteiler nilpotenter Gruppen hyperzentral. Da weiter das Zentrum stets hyperzentral ist, so folgt durch eine naheliegende Induktion aus BAER [3; Satz 1] die Hyperzentralität aller $Z_i(G)$.

Satz 2. *Der endlich erzeugbare Normalteiler N der Gruppe G ist dann und nur dann in einem $Z_i(G)$ enthalten, wenn N eine Nilgruppe und hyperzentral ist.*

Beweis. Daß $Z_i(G)$ hyperzentral ist, haben wir schon erwähnt; und also sind alle in $Z_i(G)$ enthaltenen Normalteiler von G hyperzentral. Untergruppen von $Z_i(G)$ sind von endlicher Klasse und also Nilgruppen [§ 1, Satz 2]. Damit ist die Notwendigkeit unserer Bedingung dargetan.

Ist der endlich erzeugbare Normalteiler N von G eine Nilgruppe und hyperzentral, so ist N eine NOETHERsche Gruppe endlicher Klasse [Satz 1]. Ist weiter M ein N nicht enthaltender Normalteiler von G, so ist $N^*=MN/M$ ein von 1 verschiedener, NOETHERscher, hyperzentraler Normalteiler endlicher Klasse von $G^*=G/M$. Insbesondere ist also $Z(N^*)\neq 1$. Als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers ist $Z(N^*)$ ein Normalteiler von G^*. Mit N^* ist auch $Z(N^*)$ hyperzentral in G^*. Schließlich ist $Z(N^*)$ eine endlich erzeugbare ABELsche Gruppe, da ja N^* noethersch ist. Daraus folgt aber $Z(N^*)\cap Z(G^*)\neq 1$, wie sich etwa aus BAER [3, Satz 4] in Verbindung mit BAER [2; § 1, Lemma 4] ergibt. Insbesondere ist also $N^*\cap Z(G^*)\neq 1$.

Wäre nun N nicht in der Vereinigung V aller $Z_i(G)$ enthalten [die ja ebenfalls eine charakteristische Untergruppe von G ist], so folgte

$$1 \neq (VN/V) \cap Z(G/V)$$

aus dem Resultat des vorigen Absatzes; und es existierte ein nicht in V enthaltenes Element w in N, dessen Restklasse Vw zu $Z(G/V)$ gehört, so daß insbesondere $[w, G] \leq V \cap N$ ist. Da N NOETHERsch ist, so ist $V \cap N$ eine endlich erzeugbare Untergruppe der Vereinigung V aller $Z_i(G)$; und daraus folgt die Existenz einer

$$[w, G] \leq V \cap N \leq Z_k(G)$$

erfüllenden Zahl k. Aus dieser Ungleichung ergibt sich aber, daß w zu $Z_{k+1}(G) \leq V$ gehört, ein Widerspruch. Folglich ist N in der Vereinigung V aller $Z_i(G)$ enthalten; und aus der endlichen Erzeugbarkeit von N erschließen wir die Existenz einer $N \leq Z_n(G)$ erfüllenden Zahl n, q. e. d.

Zusatz 1. *Wenn jedes Element aus der Gruppe G in einem endlich erzeugbaren Normalteiler von G enthalten ist, dann sind die folgenden Eigenschaften von G miteinander äquivalent:*

(1) *G ist die Vereinigung aller $Z_i(G)$.*
(2) *G ist obernilpotent.*
(3) *G ist eine Nilgruppe.*

Bemerkung 5. Man kann leicht Gruppen der Klasse 2 konstruieren, deren Elemente nicht sämtlich in endlich erzeugbaren Normalteilern enthalten sind.

Bemerkung 6. Es ist klar, daß die Gruppen G mit Eigenschaft (1) sämtlich obernilpotente Nilgruppen sind. Es ist eine offene Frage, wie die obernilpotenten Nilgruppen zu charakterisieren sind.

Beweis. Es ist klar, daß (2) aus (1) folgt. Ist G obernilpotent, so liegt jedes Element aus G in einem endlich erzeugbaren Normalteiler von G, der obernilpotent und also nach Satz 1 eine Nilgruppe ist. Folglich ist G eine Nilgruppe und (3) eine Folge von (2). Daß schließlich (1) aus (3) folgt, ergibt sich sofort aus Satz 2, q. e. d.

6. Gruppen endlicher Klasse mit Minimalbedingung.

Die in diesem Abschnitt zu behandelnden Gruppen sind insbesondere obernilpotente Torsionsgruppen; und wir beginnen deshalb mit einer Charakterisierung dieser Gruppenklasse.

Satz 1. *G ist dann und nur dann eine obernilpotente Torsionsgruppe, wenn*

(a) *G nilpotent ist,*
(b) *G nachauflösbar ist und*
(c) *jedes unendliche homomorphe Bild von G einen minimalen Normalteiler besitzt, von dessen Normalteilern die Minimalbedingung erfüllt wird.*

Bemerkung 1. Man sieht leicht ein, daß Nilgruppen die Eigenschaften (a) und (b) haben; jedoch ist nicht jede obernilpotente Torsionsgruppe eine Nilgruppe; s. § 1.

Beweis. Es ist ziemlich klar, daß die Bedingungen (a), (b), (c) notwendig sind. Wir nehmen also an, daß G die Eigenschaften (a), (b), (c) hat. Um die Obernilpotenz von G nachzuweisen, betrachten wir ein homomorphes Bild $H \neq 1$ von G. Ist H endlich, so ist H wegen (a) eine endliche nilpotente Gruppe und also $Z(H) \neq 1$. Ist aber H unendlich, so existiert wegen (c) ein minimaler Normalteiler M von H, von dessen Normalteilern die Minimalbedingung erfüllt wird. Da M frei von eigentlichen charakteristischen Untergruppen ist, so ist M sicher das Produkt seiner minimalen Normalteiler. Folglich ist jeder minimale Normalteiler von M direkter Faktor von M; und M ist direktes Produkt einiger seiner minimalen Normalteiler. Aus der Minimalbedingung [für Normalteiler von M] folgt dann sogar, daß M direktes Produkt endlich vieler minimaler Normalteiler von M ist. Ist X irgendein minimaler Normalteiler von M, so ist X direkter Faktor von M; und jeder Normalteiler von X ist Normalteiler von M. Aus der Minimalität von X ergibt sich also die Einfachheit der Gruppe X. Da X ein homomorphes Bild einer Untergruppe von G ist, so folgt aus (b) die Nachauflösbarkeit von X, wenn wir uns nur daran erinnern, daß Untergruppen und homomorphe Bilder nach auflösbaren Gruppen ebenfalls nachauflösbar sind [§ 4]. Einfache nachauflösbare Gruppen sind sicher abelsch und also sogar zyklisch von Primzahlordnung. Da M direktes Produkt endlich vieler minimaler Normalteiler von M ist, von denen wir gerade gezeigt haben, daß sie zyklisch von Primzahlordnung sind, so ist M eine endliche ABELsche Gruppe. Endliche minimale Normalteiler nilpotenter Gruppen liegen aber im Zentrum; s. BAER [*3*; Lemma 2]. Folglich ist $1 < M \leq Z(H)$. Damit ist die Obernilpotenz von G voll bewiesen.

Die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in G bildet eine Torsionsuntergruppe T von G, da G obernilpotent ist; s. BAER [*2*; § 6, Theorem 1, 2]. Wäre $T \neq G$, so enthielte G/T einen minimalen Normalteiler M/T [wegen (c)]. Wegen der Obernilpotenz von G und der Minimalität von M/T ist $M/T \leq Z(G/T)$ und also M/T zyklisch von Primzahlordnung. Dann ist aber auch M eine Torsionsuntergruppe von G, so daß $M \leq T < M$ wird, ein Widerspruch. Folglich ist $G = T$ eine obernilpotente Torsionsgruppe.

Lemma 1. *Ist N ein Normalteiler endlicher Klasse und $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe der Gruppe G, so ist $\{N, g\}$ von endlicher Klasse.*

Bemerkung 2. Es genügt nicht anzunehmen, daß g die ENGELsche Eigenschaft hat [oder $\{N, g\}$ engelsch ist] wie folgendes Beispiel zeigt. Es sei N ein direktes Produkt von abzählbar vielen isomorphen zyklischen Gruppen und $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ eine Basis von N. Die Gruppe G entstehe aus N durch Adjunktion eines Elements g, das den folgenden Bedingungen genügt:

$$g^{-1} a_1 g = a_1, \qquad g^{-1} a_i g = a_i a_{i-1} \quad \text{für} \quad 1 < i.$$

Man überzeugt sich sofort, daß N ein ABELscher Normalteiler von G ist, und daß jede der Untergruppen $\{a_1, \ldots, a_i, g\}$ von endlicher Klasse ist. Also ist G als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Untergruppen endlicher Klasse selbst eine ENGELsche Gruppe. Aber G kann nicht von endlicher

Klasse sein, da die Klassen der Untergruppen $\{a_1, \ldots, a_i, g\}$ mit i gegen unendlich streben.

Beweis. Wir werden durch vollständige Induktion zeigen, daß jede der Faktorgruppen $\{N, g\}/{}^iN$ von endlicher Klasse ist. Dies ist für $i=0$ trivialerweise richtig, da ja $\{N, g\}/N$ zyklisch ist. Wir nehmen also an, daß $\{N, g\}/{}^iN$ von endlicher Klasse ist. Um daraus herzuleiten, daß auch $\{N, g\}/{}^{i+1}N$ von endlicher Klasse ist, setzen wir $H=\{N, g\}/{}^{i+1}N$ und $K={}^iN/{}^{i+1}N$. Dann ist $K \leq Z(N/{}^{i+1}N)$, so daß K ein Abelscher Normalteiler von H ist; und $H/K \sim \{N, g\}/{}^iN$ ist von endlicher Klasse. Da g eine nachinvariante Untergruppe von G erzeugt, so erzeugt $h={}^{i+1}Ng$ eine nachinvariante Untergruppe von H; und in dem Abelschen Normalteiler K von H induziert h einen Automorphismus σ. Das Element h erzeugt auch eine nachinvariante Untergruppe von $\{K, h\}$; und aus der Kommutativität des Normalteilers K von $U=\{K, h\}$ folgert man, daß $K_i(h; U)=K^{(\sigma-1)^i}$ ist. Aus § 1, Folgerung 2 ergibt sich dann die Existenz einer ganzen Zahl n derart, daß $K^{(\sigma-1)^n}=1$ ist. Da H/K von endlicher Klasse ist, so gibt es eine ganze Zahl k derart, daß ${}^k(H/K)=1$ ist. Also wird ${}^kH \leq K \leq Z(N/{}^{i+1}N)$. Da aber $H=\{N/{}^{i+1}N, h\}$ ist, und da der von h in K induzierte Automorphismus σ der Gleichung $(\sigma-1)^n=0$ genügt, so folgt ${}^{n+k}H=1$, so daß also auch $\{N, g\}/{}^{i+1}N$ von endlicher Klasse ist. Damit ist unser induktiver Beweis beendet. Da N von endlicher Klasse ist, so existiert eine Zahl c derart, daß ${}^cN=1$ und $\{N, g\}=\{N, g\}/{}^cN$ von endlicher Klasse ist, q. e. d.

Lemma 2. *Wenn N ein Normalteiler endlicher Klasse mit endlich erzeugbarer Faktorgruppe G/N der Nilgruppe G ist, dann ist G von endlicher Klasse.*

Beweis. Da G/N nach Voraussetzung eine endlich erzeugbare Nilgruppe ist, so ist G/N nach § 5, Satz 1 [oder § 3, Lemma 2] eine Noethersche Gruppe endlicher Klasse. Es gibt also [endlich viele] Normalteiler N_i von G derart, daß $N=N_0$, $N_i < N_{i+1}$, N_{i+1}/N_i zyklisch und $N_k=G$ ist. Weiter existieren Elemente g_i in G derart, daß $N_{i+1}=\{N_i, g_i\}$ ist. Da G eine Nilgruppe ist, so erzeugt jedes g_i eine nachinvariante Untergruppe von G. Durch eine naheliegende Induktion folgt nun aus Lemma 1, daß jedes N_i und also auch G von endlicher Klasse ist.

Lemma 3. *Besitzt die Gruppe G einen Abelschen Normalteiler von endlichem Index, von dessen Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird, dann ist $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ für jedes positive i endlich.*

Bemerkung 3. Unsere Behauptung wird falsch für $i=0$, da es unendliche Abelsche Gruppen gibt, von deren Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird.

Beweis. Wegen $0<i$ können wir $H=G/Z_{i-1}(G)$ bilden. Dann ist $Z(H)=Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$ und $Z_2(H)=Z_{i+1}(G)/Z_{i-1}(G)$, so daß

$$Z_2(H)/Z(H) \simeq Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$$

wird. Es genügt also, die Endlichkeit von $Z_2(H)/Z(H)$ zu erweisen.

Da G einen ABELschen Normalteiler von endlichem Index besitzt, von dessen Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird, so wird die Minimalbedingung von den Untergruppen von G und also auch von H erfüllt. Weiter besitzt H einen ABELschen Normalteiler A von endlichem Index $[H:A]$. Dann ist auch $N=Z(H)A$ ein ABELscher Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe H/N; und $M=N\cap Z_2(H)$ ist ein $Z(H)$ enthaltender Normalteiler von H. Aus

$$Z_2(H)/M \simeq NZ_2(H)/N \leq H/N$$

folgt die Endlichkeit von $Z_2(H)/M$; und es genügt also, die Endlichkeit von $M/Z(H)$ zu beweisen.

Ist s ein Element in H, so induziert s in dem ABELschen Normalteiler M von H einen Automorphismus σ. Da M in dem ABELschen Normalteiler N von H enthalten ist, und da $[H:N]=n$ endlich ist so, liegt s^n in N und $\sigma^n=1$. Aus $M\leq Z_2(H)$ folgt $M^{\sigma-1}\leq Z(H)$, so daß σ jedes Element aus $M^{\sigma-1}$ invariant läßt. Ist also x irgendein Element aus M, so wird

$$1=x^{\sigma^n-1}=x^{(\sigma-1)(\sigma^{n-1}+\cdots+1)}=x^{(\sigma-1)n};$$

und damit ist $[M^{\sigma-1}]^n=1$ gezeigt. Da die Minimalbedingung von den Untergruppen der ABELschen Gruppe M erfüllt wird, so enthält M nur endlich viele Lösungen der Gleichung $y^n=1$; und damit ist insbesondere die Endlichkeit von $M^{\sigma-1}$ gezeigt. Da $\sigma-1$ ein Endomorphismus der ABELschen Gruppe M ist, so hat der Kern dieses Endomorphismus endlichen Index in M. Der Kern von $\sigma-1$ besteht aber genau aus der Gesamtheit der Elemente aus M, die mit s vertauschbar sind. Bezeichnen wir nun mit $M(s)$ diesen Durchschnitt von M mit dem Zentralisator von s, so haben wir also die Endlichkeit des Index $[M:M(s)]$ dargetan.

Sei schließlich R irgendein [endliches] Repräsentantensystem der endlichen Faktorgruppe H/N. Da M eine $Z(H)$ enthaltende Untergruppe der ABELschen Gruppe N ist, so gehört ein Element aus M dann und nur dann zu $Z(H)$, wenn es mit jedem Element aus R vertauschbar ist. Also wird

$$Z(H)=\bigcap_{r \text{ in } R} M(r).$$

Aus der Endlichkeit von R und der Endlichkeit aller Indizes $[M:M(r)]$ folgt nach dem POINCARÉschen Satz nun auch die Endlichkeit von $[M:Z(H)]$; und damit ist, wie früher bemerkt, unser Lemma vollständig bewiesen.

Satz 2. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind untereinander äquivalent:*

(1) *$G/Z(G)$ ist eine endliche nilpotente Gruppe; und die Minimalbedingung wird von den Untergruppen von $Z(G)$ erfüllt.*

(2) *G ist eine Gruppe endlicher Klasse, von deren Normalteilern die Minimalbedingung erfüllt wird.*

(3) *G ist eine Nilgruppe, von deren nachinvarianten Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird.*

(4) $\begin{cases} \text{(a) } G \textit{ ist eine nilpotente, nachauflösbare Gruppe.} \\ \text{(b) } \textit{Jede endliche Faktorgruppe von } G \textit{ besitzt ein Repräsentantensystem,} \\ \textit{dessen Elemente nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugen.} \\ \text{(c) } \textit{Die Minimalbedingung wird von den nachinvarianten Untergruppen} \\ \textit{von } G \textit{ erfüllt.} \end{cases}$

(5) *G ist eine Nilgruppe, von deren* Abelschen *Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird.*

Bemerkung 4. Sowohl aus Bedingung (1) wie aus Bedingung (2) ergibt sich mühelos, daß die Minimalbedingung von den Untergruppen von G erfüllt wird.

Beweis. Daß (2) aus (1), (3) aus (2) und (4) aus (3) folgt, sieht man ohne große Mühe ein.

Ist G eine der Bedingung (4) genügende Gruppe, so folgt aus Satz 1, daß G eine obernilpotente Torsionsgruppe ist. Wir bilden den Durchschnitt D aller Untergruppen von endlichem Index in G. Da jede Untergruppe von endlichem Index in G einen Normalteiler von endlichem Index in G enthält — wie etwa aus dem Poincaréschen Satz folgt —, so ist D der Durchschnitt aller Normalteiler X mit endlicher Faktorgruppe G/X. Da aber die Minimalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird, so ist D sogar der Durchschnitt endlich vieler Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe; und daraus folgt die Endlichkeit von G/D.

Wäre D nicht abelsch, so wäre $Z(D) < D$. Als Untergruppe einer obernilpotenten Torsionsgruppe ist D eine obernilpotente Torsionsgruppe, so daß insbesondere $Z_2(D)/Z(D)$ ein Element $Z(D)g$ von Primzahlordnung p enthält. Man bestätigt durch eine einfache [und wohlbekannte] Rechnung, daß $[g, x]^p = 1$ für jedes x aus D gilt, und daß die Abbildung von x auf $[g, x]$ ein Homomorphismus von D nach $Z(D)$ ist. Der Kern dieses Homomorphismus ist der Zentralisator C von g in D. Folglich ist C ein Normalteiler von D und D/C eine Abelsche Gruppe, deren von 1 verschiedene Elemente die Primzahlordnung p haben. Wäre $D/C \neq 1$, so besäße diese Abelsche Gruppe Untergruppen vom Index p, so daß D selbst Untergruppen vom Index p besäße. Diese wären dann echte Untergruppen von D, deren Index in G endlich wäre, was der Definition von D widerspräche. Folglich ist $D/C = 1$ oder $D = C$, so daß g dem Zentrum von D angehörte und also das Element $Z(D)g$ der Ordnung p gleich 1 wäre. Aus diesem Widerspruch folgt die Kommutativität von D.

Aus der Endlichkeit von G/D und (4.b) folgt die Existenz eines Repräsentantensystems R von G modulo D, dessen Elemente nachinvariante [zyklische] Untergruppen von G erzeugen. Da D ein Abelscher Normalteiler von G ist, so erzeugt jedes Element in D eine nachinvariante Untergruppe von G. Also wird G von seinen nachinvarianten zyklischen Untergruppen erzeugt; und es folgt aus § 3, Zusatz 1, daß G eine Nilgruppe ist. Da also D ein Abelscher Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe G/D und G eine Nilgruppe ist, so folgt aus Lemma 2, daß G von endlicher Klasse ist.

Aus der Minimalbedingung für nachinvariante Untergruppen ergibt sich die Minimalbedingung für die Untergruppen des ABELschen Normalteilers D; und aus der Endlichkeit von G/D folgt die Gültigkeit der Minimalbedingung für die Untergruppen von G. Aus Lemma 3 folgt dann die Endlichkeit aller $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ mit $0<i$. Da G von endlicher Klasse ist, so ist bekanntlich $G=Z_c(G)$ für ein gewisses positives c. Folglich ist $G/Z(G)$ endlich; und damit ist die Äquivalenz der ersten vier Bedingungen bewiesen.

Es ist klar, daß (5) aus den äquivalenten Bedingungen (1) bis (4) folgt. Ist G eine Nilgruppe, von deren ABELschen Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird, so ist G insbesondere eine Torsionsgruppe. Ist g irgendein Element in G, so ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von G und es gibt eine $\{g\}=N_n(g;G)$ erfüllende ganze Zahl n [§ 1, Satz 1]. Wir wollen die Endlichkeit aller $N_i(g;G)$ mit $0<i\leq n$ beweisen. Da G eine Torsionsgruppe ist, so ist $\{g\}=N_n(g;G)$ sicher endlich. Sei also $1<i\leq n$ und die Endlichkeit von $N_i(g;G)$ bereits bewiesen. Dann ist $N_{i-1}(g;G)$ das Produkt der zu $N_i(g;G)$ in $N_{i-2}(g;G)$ konjugierten Untergruppen [§ 1, Lemma 2], so daß also insbesondere $N_{i-1}(g;G)$ ein Produkt von isomorphen endlichen Normalteilern ist. Daraus folgt erstens, daß die Ordnungen der Elemente in $N_{i-1}(g;G)$ beschränkt sind, und zweitens, daß jedes Element aus $N_{i-1}(g;G)$ nur endlich viele konjugierte in $N_{i-1}(g;G)$ besitzt. Bedingung (iv) von BAER [6; § 0, Theorem] wird also von $N_{i-1}(g;G)$ erfüllt, so daß die Zentrumsfaktorgruppe von $N_{i-1}(g;G)$ endlich ist und die Minimalbedingung von den Untergruppen von $N_{i-1}(g;G)$ erfüllt wird. Da die Ordnungen der Elemente in $N_{i-1}(g;G)$ beschränkt sind, so ist $Z[N_{i-1}(g;G)]$ endlich; und also ist auch $N_{i-1}(g;G)$ endlich. Durch vollständige Induktion folgt nun die Endlichkeit von $N_1(g;G)$. — Damit ist gezeigt, daß jedes Element aus G in einem endlichen Normalteiler von G enthalten ist und also nur endlich viele konjugierte in G besitzt. Bedingung (iv) von BAER [6; § 0, Theorem] wird also von G erfüllt, so daß die Minimalbedingung von den Untergruppen der Nilgruppe G erfüllt wird. Also ist (3) eine Folge von (5); und damit ist die Äquivalenz der Bedingungen (1) bis (5) erwiesen, q. e. d.

Bemerkung 5. Man kann leicht Beispiele unendlicher obernilpotenter Gruppen mit Minimalbedingung und endlichem Zentrum konstruieren. Diese können nach Satz 2 nicht Nilgruppen sein. Da Nilgruppen mit Minimalbedingung nach Satz 2 von endlicher Klasse sind, so ist die Klasse der Nilgruppen mit Minimalbedingung kleiner als die Klasse der obernilpotenten Gruppen mit Minimalbedingung.

7. Endlichkeitskriterien.

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Herleitung von Kriterien dafür, daß eine Gruppe endlich und auflösbar ist. Doch gestatten unsere bisherigen Untersuchungen die Ableitung allgemeinerer Endlichkeitskriterien, die auch an sich von Interesse sind.

Lemma 1. *Eine Gruppe ist [dann und nur dann] endlich, wenn sie endlich erzeugbar ist, und wenn jedes ihrer unendlichen homomorphen Bilder eine von 1 verschiedene, endliche, zyklische, nachinvariante Untergruppe besitzt.*

Beweis. Es sei G eine endlich erzeugbare Gruppe, deren sämtliche unendliche homomorphen Bilder von 1 verschiedene, endliche, zyklische, nachinvariante Untergruppen besitzen. Wäre G unendlich, so existierte [wegen § 2, Lemma 2] ein unendliches homomorphes Bild H von G, dessen sämtliche echte homomorphe Bilder endlich sind. Es sei T die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in H, die nachinvariante [zyklische] Untergruppen von H erzeugen. Aus der Unendlichkeit von H und unserer zweiten Voraussetzung folgt $T \neq 1$. Aus § 3, Satz 2 und § 3, Zusatz 3 ergibt sich, daß T eine charakteristische Untergruppe von H ist. Das echte homomorphe Bild H/T von H ist also endlich. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G und H und der Endlichkeit von H/T folgt die endliche Erzeugbarkeit von T [§ 2, Lemma 1]. Also ist T eine von endlich vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugte Nilgruppe und als solche ist T endlich [§ 3, Zusatz 2]. Aus der Endlichkeit von T und H/T folgt die Endlichkeit der unendlichen Gruppe H. Aus diesem Widerspruch ergibt sich die Endlichkeit von G, q. e. d.

Lemma 2. *Die Gruppe G ist endlich, wenn jedes echte homomorphe Bild von G endlich ist, und wenn sowohl minimale Normalteiler wie auch von 1 verschiedene, zyklische, nachinvariante Untergruppen von G existieren.*

Bemerkung 1. Aus der Existenz unendlicher einfacher Gruppen folgt die Unentbehrlichkeit der dritten Voraussetzung.

Beweis. Die Gesamtheit $R = R(G)$ der nachinvariante [zyklische] Untergruppen erzeugenden Elemente aus G ist eine charakteristische Untergruppe von G [§ 3, Satz 2]. Aus unserer dritten Voraussetzung ergibt sich $R \neq 1$. Weiter existiert ein minimaler Normalteiler M von G; und aus unserer ersten Voraussetzung erschließen wir die Endlichkeit von G/R und G/M.

Ist $R \cap M = 1$, so ist R einer Untergruppe von G/M isomorph. Aus der Endlichkeit von G/M folgt die von R und aus der Endlichkeit von R und G/R folgt die von G.

Ist zweitens $R \cap M \neq 1$, so folgt aus der Minimalität des Normalteilers M von G, daß $M = R \cap M$ oder $M \leqq R$ ist. M ist also eine Nilgruppe. Ist $g \neq 1$ irgendein Element aus M, so ist $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von M [und G]. Ist $N = N_1(g; M)$ der kleinste g enthaltende Normalteiler von M, so folgt aus der Endlichkeit von G/M, daß N nur endlich viele konjugierte in G besitzt, deren Produkt ein von 1 verschiedener, in M enthaltener Normalteiler von G ist. Aus der Minimalität von M ergibt sich dann, daß M das Produkt der zu N in G konjugierten Untergruppen ist. Da es nur endlich viel zu N konjugierte Untergruppen gibt, so existieren zu N konjugierte Untergruppen $N = N_1, N_2, \ldots, N_n$ mit $0 < n$, $N_2 \ldots N_n < M = N_1 N_2 \ldots N_n$ — im Falle $n = 1$ ist $N_2 \ldots N_n = 1$. Dann ist $M/N_2 \ldots N_n$ der kleinste $N_2 \ldots N_n g$ enthaltende Normalteiler von $M/N_2 \ldots N_n$. Da aber $\{g\}$ eine nachinvariante Untergruppe von M ist, so ist $M/N_2 \ldots N_n$ eine von 1 verschiedene zyklische

Gruppe. Also ist $M' < M$. Als minimaler Normalteiler ist M frei von charakteristischen Untergruppen, so daß insbesondere $M' = 1$ und M abelsch ist. Dann besitzt aber das Element $g \neq 1$ aus dem ABELschen Normalteiler M mit endlicher Faktorgruppe G/M nur endlich viele konjugierte, die M erzeugen, da M ein minimaler Normalteiler ist. Damit ist gezeigt, daß M eine endlich erzeugbare ABELsche Gruppe ohne charakteristische Untergruppen ist; und es ist wohlbekannt und trivial einzusehen, daß daraus die Endlichkeit von M folgt. Aus der Endlichkeit von M und G/M ergibt sich aber wieder die Endlichkeit von G, q. e. d.

Satz 1. *Die nachauflösbare Gruppe G ist endlich, wenn sie wenigstens eine der folgenden fünf Bedingungen erfüllt:*

(1) *Die Maximalbedingung wird von den Normalteilern von G erfüllt; und von 1 verschiedene homomorphe Bilder von G besitzen minimale Normalteiler.*

(2) *Die Maximalbedingung wird von den Normalteilern von G erfüllt; und die Ordnungen der endlichen homomorphen Bilder von G sind beschränkt.*

(3) *G ist endlich erzeugbar; und von 1 verschiedene homomorphe Bilder von G besitzen minimale Normalteiler.*

(4) *G ist endlich erzeugbar; und die Indizes $[G:C]$ der charakteristischen Untergruppen C von G mit endlicher Faktorgruppe G/C sind beschränkt.*

(5) *G ist eine endlich erzeugbare Torsionsgruppe.*

Bemerkung 2. Wird die Minimalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt, so sind die zweiten Teile der Bedingungen (1) bis (4) automatisch erfüllt.

Bemerkung 3. Zu (5) vgl. § 4, Lemma 3.

Bemerkung 4. Endliche nachauflösbare Gruppen sind auflösbar [§ 4, Satz 2].

Beweis. Wäre die Gruppe G unendlich, so existierte ein unendliches homomorphes Bild H von G, dessen echte homomorphe Bilder endlich sind — dies ist klar, wenn die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird; und es folgt aus § 2, Lemma 2, wenn G endlich erzeugbar ist.

Aus Lemma 2 folgt dann, daß die unendliche, nachauflösbare Gruppe H keinen minimalen Normalteiler besitzen kann; und G erfüllt also weder (1) noch (3).

Wären weiter die Ordnungen der endlichen homomorphen Bilder von G beschränkt, so existierte ein Normalteiler M von H mit maximalem Index $[H:M]$. Ist $N \neq 1$ irgendein Normalteiler von H, so ist H/N als echtes homomorphes Bild von H endlich. Also sind auch $[H:N]$ und $[H:M \cap N]$ endlich; und aus der Maximalität von $[H:M]$ folgt dann $M = M \cap N$ oder $M \leqq N$, so daß M ein minimaler Normalteiler von H wäre. Dies ist aber wegen Lemma 2 unmöglich; und G erfüllt also auch nicht Bedingung (2).

Ist G endlich erzeugbar, so enthält jeder Normalteiler N mit endlicher Faktorgruppe G/N eine charakteristische Untergruppe C von G mit endlicher Faktorgruppe G/C; s. BAER [4; p. 331, § 5, Folgerung 3]. Aus der Beschränktheit der Indizes $[G:C]$ folgt also die Beschränktheit der Ordnungen endlicher

homomorpher Bilder von G [und H]; und wir haben bereits die Unmöglichkeit dieser Eigenschaft erkannt. G genügt also auch nicht der Bedingung (4).

Schließlich folgt aus Lemma 1, daß H nicht eine endlich erzeugbare Torsionsgruppe sein kann; und damit ist auch die Unmöglichkeit von (5) dargetan. Die Annahme der Unendlichkeit von G hat uns also zu einem Widerspruch geführt, aus dem die Endlichkeit von G folgt, q. e. d.

Bemerkung 5. Da alle Nilgruppen nachauflösbar und nilpotent sind, so ist *eine Nilgruppe eine endliche und nilpotente Gruppe, wenn sie wenigstens eine der fünf Bedingungen* (1) *bis* (5) *des Satzes 1 erfüllt.* Da eine Gruppe sicher dann eine Nilgruppe ist, wenn sie von ihren zyklischen nachinvarianten Untergruppen erzeugt wird [§ 3, Zusatz 1], so genügt es sogar, diese letzte Annahme [zusammen mit einer der fünf Bedingungen] zu machen.

Literatur.

Baer, Reinhold: [*1*] Nilpotent groups and their generalizations. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 393—434 (1940). — [*2*] The hypercenter of a group. Acta Math. **89**, 165—208 (1953). — [*3*] Das Hyperzentrum einer Gruppe. II. Arch. Math. **1**, 86—96 (1953). — [*4*] Das Hyperzentrum einer Gruppe. III. Math. Z. **59**, 299—338 (1953). — [*5*] Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. Math. Ann. **129**, 139—173 (1955). — [*6*] Finite extensions of abelian groups with minimum condition. Trans. Amer. Math. Soc. (erscheint demnächst).

Gruenberg, K. W.: [*1*] Two theorems on Engel groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 377—380 (1953).

Hirsch, K.: [*1*] On infinite soluble groups. III. Proc. Lond. Math. Soc. **49**, 184—194 (1946).

Iwasawa, K.: [*1*] Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **23** (III), 1—4 (1941).

Kontorovič, P. G.: [*1*] Invariant überdeckte Gruppen. Mat. Sbornik **28**, 79—88 (1951). [Russisch.]

Kuroš, A.: [*1*] Gruppentheorie, 2. Aufl. Moskau 1953. [Russisch.]

Malcew, I. A.: [*1*] Unendliche auflösbare Gruppen. Mat. Sbornik **28**, 567—588 (1951). [Russisch.]

Plotkin, B.: [*1*] Über Nilgruppen. Dokl. Akad. Nauk SSSR. **94**, 999—1001 (1954). [Russisch.]

Schenkman, E.: [*1*] A generalization of the central elements of a group. Pacific J. Math. **3**, 501—504 (1953).

Schmidt, O.: [*1*] Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind. Rec. Math. Moscou **31**, 366—372 (1924).

Wielandt, H.: [*1*] Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209—244 (1939).

Zassenhaus, H.: [*1*] Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik. Abh. Math. Sem. Hamburg **13**, 1—100 (1940).

Zorn, M.: [*1*] Nilpotency of finite groups. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 485—486 (1936).

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Ill. (USA.).

(Eingegangen am 14. März 1955.)

BRAFMAN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 438—442 (1955)

Series of Products of Gegenbauer Polynomials.

By
FRED BRAFMAN.

1. *Statement of result.* Results on Legendre polynomials $P_n(x)$ which are essentially due to the structure of the polynomials permit extension to the more general Gegenbauer polynomials $C_n^{(\alpha)}(x)$ or ultraspherical polynomials $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$. This note is to extend the recent result by VINTI [5] that

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2})\,P_n(x)\,P_n(y)\,P_n(z)=\begin{cases}\pi^{-1}g^{-\frac{1}{2}}, & g>0\\ 0, & g<0\end{cases} \tag{1}$$

for

$$-1<x<1,\quad -1<y<1,\quad -1<z<1,$$

$$g(x,y,z)=1-x^2-y^2-z^2+2xyz.$$

THEOREM. *Let $(a)_n$ denote the usual factorial notation*

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1). \tag{2}$$

Then

$$\frac{\alpha[\Gamma(\alpha)]^4[(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)]^{\alpha-\frac{1}{2}}}{[\Gamma(2\alpha)]^2\pi\,2^{2-4\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,n!\,(1+\alpha)_n\,C_n^{(\alpha)}(x)\,C_n^{(\alpha)}(y)\,C_n^{(\alpha)}(z)}{(2\alpha)_n\,(2\alpha)_n\,(\alpha)_n}$$
$$=\begin{cases}g^{\alpha-1}, & g>0\\ 0, & g<0.\end{cases} \tag{3}$$

The definition of $g(x,y,z)$ in (3) and the restrictions on x, y, z are the same as for (1), and in addition

$$\alpha>0. \tag{4}$$

The ultraspherical polynomials $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ are related to the Gegenbauer polynomials by the formula

$$C_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(2\alpha)_n}{(\alpha+\frac{1}{2})_n}P_n^{(\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2})}(x). \tag{5}$$

The substitution of (5) in (3) and the replacing of α by $\alpha+\frac{1}{2}$ leads to

$$\frac{(\alpha+\frac{1}{2})[(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)]^{\alpha}}{[\Gamma(2\alpha+1)]^2\pi\,2^{-1-4\alpha}[\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})]^{-4}}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\alpha+1)_n(\alpha+\frac{3}{2})_n\,n!\,n!\,P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)\,P_n^{(\alpha,\alpha)}(y)\,P_n^{(\alpha,\alpha)}(z)}{(\alpha+1)_n(\alpha+1)_n(\alpha+1)_n(\alpha+\frac{1}{2})_n}$$
$$=\begin{cases}g^{\alpha-\frac{1}{2}}, & g>0\\ 0, & g<0\end{cases} \tag{6}$$

for $\alpha>-\frac{1}{2}$.

Placing $\alpha=\frac{1}{2}$ in (3) or $\alpha=0$ in (6) yields (1) as a special case.

2. *Formal derivation.* The result will first be formally presented in this section. Assume an expansion of the form

$$(7)\qquad (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{(\alpha)}(x)=\begin{cases} g^{\alpha-1}, & g>0\\ 0, & g<0.\end{cases}$$

Use Vinti's notation of

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1=yz-(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\\ x_2=yz+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\\ \cos\varphi=(x-yz)(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$$

and the standard normalization factor ([4], p. 81, formula 4.7.15)

$$(9)\qquad \frac{\Gamma(2\alpha)\,2^{1-2\alpha}\pi(2\alpha)_n(\alpha)_n}{\alpha\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha)\,n!\,(\alpha+1)_n}=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}[C_n^{(\alpha)}(x)]^2\,dx.$$

This yields

$$(10)\qquad a_n=\frac{\alpha[\Gamma(\alpha)]^2 n!\,(1+\alpha)_n}{\Gamma(2\alpha)\,2^{1-2\alpha}\pi(2\alpha)_n(\alpha)_n}\int_{x_1}^{x_2} g^{\alpha-1}C_n^{(\alpha)}(x)\,dx.$$

But

$$(11)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} g^{\alpha-1}C_n^{(\alpha)}(x)\,dx\\ \displaystyle=\int_0^{\pi} C_n^{(\alpha)}[yz+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi][(1-y^2)(1-z^2)]^{\alpha-\frac{1}{2}}[(\sin\varphi)]^{2\alpha-1}d\varphi.\end{cases}$$

Using the result ([2] vol. 1, p. 177; [6], p. 369)

$$(12)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_0^{\pi} C_n^{(\alpha)}[yz+(1-y^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi](\sin\varphi)^{2\alpha-1}d\varphi\\ \qquad\qquad\displaystyle=\frac{2^{2\alpha-1}n!\,[\Gamma(\alpha)]^2 C_n^{(\alpha)}(y)\,C_n^{(\alpha)}(z)}{\Gamma(2\alpha)\,(2\alpha)_n}\end{cases}$$

it follows that

$$(13)\qquad a_n=\frac{\alpha[\Gamma(\alpha)]^4[n!]^2(1+\alpha)_n[(1-y^2)(1-z^2)]^{\alpha-\frac{1}{2}}C_n^{(\alpha)}(y)\,C_n^{(\alpha)}(z)}{\pi\cdot(2\alpha)_n\cdot(2\alpha)_n\cdot[\Gamma(2\alpha)]^2(\alpha)_n 2^{2-4\alpha}}$$

from which (3) is obtained.

3. *Proof for $\alpha>2$.* It must now be shown that the expansion (7) is valid or hence that $f(x)$ permits a Gegenbauer expansion, where $f(x)$ is defined by

$$(14a)\qquad f(x)=\frac{g^{\alpha-1}}{(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}},\qquad g>0,$$

$$(14b)\qquad f(x)=0,\qquad g<0.$$

If one assumes the rather severe restriction that $\alpha>2$, then the result follows quickly from a theorem by Rau [3], and it seems desirable to

demonstrate this here. By Rau's theorem, as quoted in [2] vol. 2, p. 211, it is sufficient to show that $f(x)$ is continuous with a sectionally continuous derivative. By noting that

$$g = (x_1 - x)(x - x_2), \tag{15}$$

the reader can easily see that Rau's conditions are satisfied for $\alpha > 2$ provided

$$x_1 \neq -1 \quad \text{and} \quad x_2 \neq +1 \tag{16}$$

are both satisfied. Condition (16) is equivalent to

$$y^2 \neq z^2. \tag{17}$$

If $y^2 = z^2$ but $x^2 \neq y^2$, then by treating the problem in the variable y, a completely analogous result follows in y for $x^2 \neq z^2$. Hence for $\alpha > 2$, the expansion is justified except possibly for $x^2 = y^2 = z^2$, or thus the expansion is justified by Rau's theorem for all points of the cube $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, $-1 < z < 1$ except the diagonal lines.

4. *A general proof.*

LEMMA 1.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \text{ exists for } \alpha > 0, \quad -1 < y < 1, \ -1 < z < 1.$$

PROOF. First,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{g^{\alpha-1}\,dx}{(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}}.$$

For $y^2 \neq z^2$, it easily follows that $-1 < x_1$ and $x_2 < 1$ and hence the factor $(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ will not affect existence. Likewise $g^{\alpha-1} = (x_1 - x)^{\alpha-1}(x - x_2)^{\alpha-1}$ and thus for $\alpha > 0$, the integral exists.

For $y = z$, the integral becomes

$$\int_{(2y^2-1)}^{1} \frac{[(1-x)(1+x-2y^2)]^{\alpha-1}\,dx}{(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}} = \int_{2y^2-1}^{1} \frac{(1+x-2y^2)^{\alpha-1}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\alpha-\frac{1}{2}}}\,dx$$

which exists under the restriction $\alpha > 0$, $-1 < y < 1$. A similar treatment shows existence for $y = -z$ and thus Lemma 1 is proven.

LEMMA 2. *For* $\alpha > 0$, $-1 < y < 1$, $-1 < z < 1$, *the integrals*

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} |f(x)|\,dx, \quad \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} |f(x)|\,dx$$

exist.

PROOF. First,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} |f(x)|\,dx = \int_{x_1}^{x_2} g^{\alpha-1}\,dx,$$

which exists for the reasons pointed out in Lemma 1.

Next,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} |f(x)|\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (1-x^2)^{-\alpha/2} g^{\alpha-1}\,dx.$$

For $y^2 \neq z^2$, $-1 < x_1$ and $x_2 < 1$ and hence the integral exists. For $y = z$, the integral becomes

$$\int_{2y^2-1}^{1} (1-x^2)^{-\alpha/2} (1-x)^{\alpha-1} (1+x-2y^2)^{\alpha-1}\,dx$$

which equals

$$\int_{(2y^2-1)}^{1} (1+x)^{-\alpha/2} (1-x)^{\alpha/2-1} (1+x-2y^2)^{\alpha-1}\,dx,$$

which exists for $\alpha > 0$. A similar argument applies for $y = -z$, and Lemma 2 is proven.

The following theorem is a special case of one by SZEGÖ ([4], p. 239, theorem 9.1.2).

A. Let $f(x)$ be Lebesgue-measurable in $[-1, +1]$ and let the integrals

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} |f(x)|\,dx, \qquad \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} |f(x)|\,dx$$

exist.

B. Let $S_n(x)$ denote the n^{th} partial sum of the expansion of $f(x)$ in a Gegenbauer series and $t_n(\cos\vartheta)$ the n^{th} partial sum of the Fourier cosine series of

$$(\sin^2\vartheta)^{\alpha/2} f(\cos\vartheta).$$

C. Conclusion: Then for $-1 < x < +1$,

$$\lim_{n\to\infty} \{S_n(x) - (1-x^2)^{-\alpha/2} t_n(x)\} = 0$$

uniformly in $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon$, for $0 < \varepsilon < 1$.

By lemmas 1 and 2, conditions A have been satisfied. For condition B, let

$$F(\vartheta) = (\sin^2\vartheta)^{\alpha/2} f(\cos\vartheta). \tag{17}$$

Then $t_n(\cos\vartheta)$ is the n^{th} partial sum of the Fourier series of $F(\vartheta)$, and convergence of this series is sufficient for condition B.

Convergence here will be based on satisfaction of Dirichlet's conditions ([1], pp. 226, 230). First note

$$F(\vartheta) = \begin{cases} 0, & g < 0, \\ [(x_1 - \cos\vartheta)(\cos\vartheta - x_2)]^{\alpha-1} (\sin^2\vartheta)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}, & g > 0. \end{cases} \tag{18}$$

Thus $F(\vartheta)$ has a finite number of points of possible infinite discontinuity, namely at $\cos\vartheta = x_1$, $\cos\vartheta = x_2$, and $\vartheta = 0$.

Excluding neighborhoods of these points, $F(\vartheta)$ is otherwise bounded. It next must be shown that this excluded interval can be broken into a finite

number of parts in each of which $F(\vartheta)$ is monotonic. But this is easily done by noting that for $g<0$, $F(\vartheta)$ is certainly monotonic, and for $g>0$, the derivative of $F(\vartheta)$ has only a finite number of roots.

The last condition requires that $\int_{-\pi}^{\pi} F(\vartheta)\, d\vartheta$ be absolutely convergent. This follows immediately from the restriction $\alpha>0$.

Thus the Fourier expansion of $F(\vartheta)$ is valid and hence the Fourier and Gegenbauer series are equiconvergent.

References.

[1] CARSLAW, H. S.: Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals. 3rd ed., p. 226 and p. 230. 1930. — [2] ERDELYI-MAGNUS-OBERHETTINGER-TRICOMI: Higher Transcendental Functions. Bateman Manuscript Project 1953. — [3] RAU, H.: Über die Entwickelung einer stetigen Funktion nach Jacobischen Polynomen. Arch. Math. **2**, 251—257 (1953). — [4] SZEGÖ, G.: Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **23** (1939). — [5] VINTI, J. P.: Note on a Series of Products of Three Legendre Polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 19—23 (1951). — [6] WATSON, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 1944.

Department of Mathematics, Wayne University, Detroit, Mich. (USA.).

(Eingegangen am 28. März 1955.)

Schieferdecker, E.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 443—468 (1955)

Zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientenhalbgruppen.

Von
Eberhard Schieferdecker.

Einleitung.

Wenn eine topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in eine Gruppe $\mathfrak{G}$ eingebettet ist, liegt die folgende Frage nahe: Kann man auf $\mathfrak{G}$ eine solche Topologie T einführen, daß $\mathfrak{G}$ zu einer topologischen Gruppe wird und daß T auf dem Teilraum $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ eine Topologie induziert, die mit der auf $\mathfrak{H}$ vorgegebenen äquivalent ist?

Zum Beispiel ist die multiplikative Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen mit der „invarianten" Metrik

$$(1) \qquad |a, b| = |\log a - \log b| \qquad a, b \in \mathfrak{Z}$$

eine topologische Halbgruppe, die man in ihre Quotientengruppe, die multiplikative Gruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ der positiven rationalen Zahlen, einbetten kann. Diese Gruppe läßt sich in einfachster Weise topologisieren, indem man die Metrik (1) „invariant fortsetzt" zu

$$(2) \qquad |r, s| = |\log r - \log s| \qquad r, s \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}).$$

Die durch (2) auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ gelieferte Topologie T_1 besitzt auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ die oben von T auf $\mathfrak{G}$ geforderten Eigenschaften.

Im allgemeinen Falle einer beliebigen topologischen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist es wesentlich schwieriger, auf $\mathfrak{G}$ eine geeignete Topologie T zu finden. In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, eine metrische Halbgruppe, deren Metrik gewissen Invarianzforderungen genügt, auch in topologischer Hinsicht einzubetten in ihre (Links-)Quotientengruppe [bzw. in eine (Links-)Quotientenhalbgruppe, falls nur eine solche existieren sollte]. Dieses Verfahren, das sich sinngemäß auch auf metrische Ringe übertragen läßt, führt im obigen Beispiel ebenfalls zu der Metrik (2) auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$.

Eine andere, weniger weitreichende Methode zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientengruppen haben Gelbaum, Kalisch und Olmstedt angegeben ([1], Satz 15). Diese Methode ist komplizierter als die zuerst erwähnte, die auf invarianter Fortsetzung der Metrik beruht, und kann zu einer anderen Topologie T' der Quotientengruppe führen:

Geht man etwa wieder von der multiplikativen Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen mit der Metrik (1) aus, so liefert das Verfahren von Gelbaum, Kalisch und Olmstedt auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ eine Topologie T_2 mittels der Metrik

$$(3) \qquad D(r, s) = \left\| \frac{r}{s} \right\| \qquad r, s \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z}),$$

wobei für $a, \alpha \in \mathfrak{Z}$

$$\left\| \frac{a}{\alpha} \right\| = \inf_{\alpha' a = a' \alpha} (|\alpha', 1| + |a', 1|) \qquad a, a', \alpha, \alpha' \in \mathfrak{Z} \tag{4}$$

gesetzt wird. Die Metrik (3) ist nicht Fortsetzung von (1), doch ist die durch T_2 auf $\mathfrak{Z}$ induzierte Topologie mit der durch (1) erhaltenen äquivalent. Durch (1) bzw. (3) wird $\mathfrak{Z}$ bzw. $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ diskret topologisiert; dagegen ist die durch (2) auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ gegebene Topologie nicht diskret.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die rein algebraischen Ergebnisse über die Einbettung von Halbgruppen in Quotientenhalbgruppen dargestellt. Dabei ergibt sich unter anderem ein besonders einfacher Zugang zu gewissen Teilen von MURATA [3] (§ 1, § 2). § 3 vermittelt den Übergang zu den Einbettungssätzen für metrische Halbgruppen, die in §§ 4 bis 5 behandelt werden. Die Sätze 1 bis 4 aus § 5 sind die Hauptsätze der Arbeit. Abschließend wird das eben skizzierte Einbettungsverfahren von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT mit dem von mir entwickelten verglichen (§ 6).

Die vorliegende Arbeit stimmt inhaltlich im großen und ganzen mit den Abschnitten I und II meiner Dissertation „Zur Einbettung metrischer Halbgruppen und Ringe in ihre Quotientenstrukturen", München 1954, überein. In den Abschnitten III und IV der Dissertation wird die Einbettung metrischer Ringe in Quotientenringe ausführlich behandelt.

§ 1. Quotientenhalbgruppen.

Eine nicht-leere Menge $\mathfrak{H}$, für deren Elemente $a, b, \ldots$ eine binäre assoziative Verknüpfungsoperation $ab = a \cdot b$ erklärt ist, nennt man eine *Halbgruppe*. ab heißt das Produkt von a und b, a (Links-), b (Rechts-)Faktor von ab. Unter einer *kommutativen* (ABELschen) Halbgruppe versteht man eine solche Halbgruppe, für deren Elemente a, b stets

$$ab = ba$$

gilt.

Definiert man das Produkt endlich vieler Halbgruppenelemente $a_1, \ldots, a_n$ wie bei Gruppen, so zeigt man leicht, daß auch hier für Produkte aus n (≥ 3) Faktoren eine Beklammerung unnötig ist; bei kommutativen Halbgruppen kommt es überdies auf die Reihenfolge der Faktoren nicht an.

Einfache Beispiele lehren, daß eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ nicht notwendig eine *Identität* (ein *Einselement*), d.h. ein Element $\mathbf{1}$ mit

$$\mathbf{1}a = a\mathbf{1} = a \qquad a \text{ beliebig} \in \mathfrak{H},$$

besitzen muß. Eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ kann höchstens *ein* Einselement enthalten. Vom abstrakt-algebraischen Standpunkt aus bedeutet es aber keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß eine Halbgruppe ein Einselement enthalte, da man notfalls ein solches Element adjungieren kann.

In Halbgruppen mit Einselement $\mathbf{1}$ kann man den Begriff eines zu einem gegebenen Element $\alpha \in \mathfrak{H}$ *inversen* Elementes α^{-1} wie bei Gruppen einführen, nämlich durch die Forderung

$$\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = \mathbf{1} \qquad \alpha, \alpha^{-1} \in \mathfrak{H}.$$

Zu vorgegebenem $\alpha \in \mathfrak{H}$ gibt es höchstens ein Inverses in $\mathfrak{H}$.

In Gruppen gelten bekanntlich die folgenden (links- bzw. rechtsseitigen) *Kürzungsregeln*

(1) Aus $\alpha a = \alpha b$ folgt $a = b$

bzw.

(2) Aus $a\alpha = b\alpha$ folgt $a = b$.

In Halbgruppen ist das im allgemeinen nicht mehr der Fall. Eine Abschwächung der Regeln (1) und (2) ist für das Folgende von grundlegender Bedeutung. Nach MURATA ([3], Definition 1) heißt ein Element α einer beliebigen, festen Halbgruppe $\mathfrak{H}$, das die beiden vorstehenden Regeln mit beliebigen Elementen $a, b \in \mathfrak{H}$ erfüllt, ein *reguläres Element* von $\mathfrak{H}$. Die regulären Elemente in Halbgruppen entsprechen den Nichtnullteilern in Ringen, sofern man allein deren multiplikative Halbgruppen in Betracht zieht. [Man kann nämlich die Nichtnullteiler eines Ringes mittels der Forderungen (1) und (2) in der multiplikativen Halbgruppe des Ringes charakterisieren.]

Unter einer *regulären Halbgruppe* wird eine Halbgruppe verstanden, die nur aus regulären Elementen besteht.

Reguläre Elemente einer Halbgruppe mit Einselement lassen sich leicht angeben: diejenigen Elemente, die ein Inverses besitzen, insbesondere also die Identität selbst.

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß die betrachteten Halbgruppen reguläre Elemente besitzen. Es ist leicht zu zeigen, daß die Menge aller regulären Elemente einer solchen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ eine Unterhalbgruppe[1]) $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{H}$ bilden.

Definition (MURATA [3], Definition 2). $\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit regulären Elementen, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. Unter einer *Linksquotientenhalbgruppe von* $\mathfrak{H}$ *bezüglich* $\mathfrak{m}$ versteht man eine Halbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ mit den folgenden Eigenschaften (i), ..., (iv):

(i) $\mathfrak{H}$ ist Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l$.

(ii) $\mathfrak{Q}_l$ besitzt ein Einselement.

(iii) Zu jedem $\alpha \in \mathfrak{m}$ existiert ein Inverses, α^{-1}, in $\mathfrak{Q}_l$.

(iv) Zu beliebigem $A \in \mathfrak{Q}_l$ gibt es ein $\alpha \in \mathfrak{m}$ mit $\alpha A \in \mathfrak{H}$.

Ist speziell $\mathfrak{m}$ gleich der Menge $\mathfrak{r}$ aller regulären Elemente von $\mathfrak{H}$, so nennt man $\mathfrak{Q}_l$ eine *Linksquotientenhalbgruppe von* $\mathfrak{H}$ schlechthin und schreibt $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{r}) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$.

[1]) Eine *Unterhalbgruppe* einer gegebenen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist eine Teilmenge von $\mathfrak{H}$, die bezüglich der in $\mathfrak{H}$ definierten Verknüpfung selbst eine Halbgruppe darstellt.

Analog läßt sich natürlich eine Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r$ von $\mathfrak{H}$ bezüglich einer Unterhalbgruppe, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht, einführen, und es gelten Sätze, die den unten für $\mathfrak{Q}_l$ zu entwickelnden ganz analog sind.

Der obigen Definition entnimmt man sofort, daß sich jedes $A \in \mathfrak{Q}_l$ als *Linksquotient*, d.h. in der Form $\alpha^{-1}a$ (α geeignet $\in \mathfrak{m}$, a geeignet $\in \mathfrak{H}$) darstellen läßt. Diese Tatsache rechtfertigt zunächst die verwendete Terminologie; die Rechengesetze in $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ können als eine Art verallgemeinerter Bruchrechenregeln aufgefaßt werden, wovon mehrfach Gebrauch gemacht werden wird.

Elemente aus $\mathfrak{H}$ werden im allgemeinen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet; Elemente aus $\mathfrak{m}$ dagegen stets mit kleinen griechischen Buchstaben.

Für den Rest dieses Paragraphen sei $\mathfrak{H}$ eine beliebige, aber fest gewählte Halbgruppe, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. Weiterhin werde angenommen, daß eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ existiert. Da jedes $A \in \mathfrak{Q}_l$ als Linksquotient darstellbar ist, ergibt sich sofort

Satz 1. *In $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist jeder Rechtsquotient $a\alpha^{-1}$ (a beliebig $\in \mathfrak{H}$, α beliebig $\in \mathfrak{m}$) als Linksquotient $\alpha'^{-1}a'$ ($\alpha' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$) darstellbar:*

$$a\alpha^{-1} = \alpha'^{-1}a'.$$

Folgerung. Wenn $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ existiert, gibt es zu beliebigen $a \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$ stets Elemente $\alpha' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$, so daß

$$\alpha' a = a' \alpha. \tag{3}$$

Um Gl. (3) zu interpretieren, kann man sich einiger gelegentlich in der Literatur vorkommender Begriffsbildungen bedienen, die für die Zwecke der vorliegenden Arbeit besonders geeignet sind. Ein Ausdruck xa ($a, x \in \mathfrak{H}$) ist ein *Linksvielfaches* von a (oder ein *Rechtsvielfaches* von x),

$$z = xa = yb \qquad a, b, x, y \in \mathfrak{H}$$

ist ein *gemeinsames* Linksvielfaches von a und b (oder ein gemeinsames Rechtsvielfaches von x und y). Die Folgerung aus Satz 1 sagt mithin aus: Existiert $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$, so haben zwei beliebige Elemente $a \in \mathfrak{H}$ und $\alpha \in \mathfrak{m}$ stets ein gemeinsames Linksvielfaches in $\mathfrak{H}$. Dabei kann man den Faktor, mit dem $a \in \mathfrak{H}$ von links zu multiplizieren ist, in $\mathfrak{m}$, den links von $\alpha \in \mathfrak{m}$ stehenden Faktor in $\mathfrak{H}$ wählen. Liegen also sowohl a als auch α in $\mathfrak{m}$, so gibt es auch ein Linksvielfaches von a und α in $\mathfrak{H}$, das man in $\mathfrak{m}$ wählen kann.

Satz 2. *In $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ wird das Produkt zweier Elemente $A = \alpha^{-1}a$ und $B = \beta^{-1}b$ ($\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a, b \in \mathfrak{H}$) gegeben durch*

$$(\alpha^{-1}a) \cdot (\beta^{-1}b) = (\beta'\alpha)^{-1}(a'b),$$

wobei $\beta' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$ so gewählt sind, daß

$$\beta' a = a' \beta.$$

Beweis. Man schreibe den Rechtsquotienten $a\beta^{-1}$ als Linksquotienten, etwa als $\beta'^{-1}a'$ ($\beta' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$). Dann gilt neben

$$\beta' a = a' \beta$$

$$(\alpha^{-1} a)\,(\beta^{-1} b) = \alpha^{-1}(a\beta^{-1})\, b = \alpha^{-1}\beta'^{-1} a' b = (\beta'\alpha)^{-1}(a' b).$$

Hat man ferner

$$\beta'' a = a'' \beta \qquad \beta'' \in \mathfrak{m},\ a'' \in \mathfrak{H},$$

so folgt wegen

$$\beta'^{-1} a' = \beta''^{-1} a'' = a\beta^{-1}$$

$$(\beta'\alpha)^{-1}(a' b) = (\beta''\alpha)^{-1}(a'' b).$$

Satz 3. *In* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *gilt, falls* $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a, b, x, y \in \mathfrak{H}$ und $x\alpha, \beta y \in \mathfrak{m}$

$$\alpha^{-1} a = (x\alpha)^{-1}(x a) \qquad x\alpha \in \mathfrak{m},$$

$$b\beta^{-1} = (b\, y)\,(\beta\, y)^{-1} \qquad y\beta \in \mathfrak{m}.$$

Beweis. Sei $a, x \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$. Dann gilt in $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$

$$x a = x(\alpha\alpha^{-1})\, a = (x\alpha)\,(\alpha^{-1} a).$$

Ist $x\alpha \in \mathfrak{m}$, so schließt man mit Rücksicht auf die Definition von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$, daß

$$(x\alpha)^{-1}(x a) = \alpha^{-1} a.$$

Die andere Gleichung wird entsprechend bewiesen.

Die erste Gleichung des Satzes 3 besagt, daß man einen Linksquotienten $A = \alpha^{-1} a$ unter gewissen Voraussetzungen von links *erweitern* darf, d.h. es dürfen *Linksnenner* α und *Rechtszähler* a durch $x\alpha$ und xa (x ein gewisses Element aus $\mathfrak{H}$) ersetzt werden, ohne daß sich der Wert A des Linksquotienten ändert. Liest man die erwähnte Gleichung von rechts nach links, so erhält man eine Aussage über das linksseitige *Kürzen* von Linksquotienten. Eine analoge Deutung kann auch für die zweite Gleichung des Satzes 3 gegeben werden.

Satz 4. *In* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *gilt dann und nur dann*

(4) $$\alpha^{-1} a = \beta^{-1} b,$$

wenn

(5) *aus* $x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}$ *folgt* $xa = yb$.

Beweis. 1. Aus (4) folgt (5): Sei

$$x\alpha = y\beta = \gamma \in \mathfrak{m}.$$

(Solche $x, y \in \mathfrak{H}$ gibt es nach der Folgerung zu Satz 1 stets.) Gilt Gl. (4), so kann man wegen Satz 3 den Quotienten $\alpha^{-1} a$ von links mit x, den Quotienten $\beta^{-1} b$ von links mit y erweitern. Die so entstehenden Linksquotienten haben den gleichen Linksnenner γ. Linksmultiplikation mit γ liefert sofort

$$x a = y b.$$

2. Aus (5) folgt (4): Ist (5) erfüllt, so besteht wegen Satz 3 die folgende Gleichung

$$\alpha^{-1}a = (x\alpha)^{-1}(xa) = (y\beta)^{-1}(yb) = \beta^{-1}b.$$

Bemerkung. Gl. (4) ist auch gleichwertig mit der Relation

(6) Zu $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a, b \in \mathfrak{H}$ gibt es $x_0, y_0 \in \mathfrak{H}$, so daß

$$x_0\alpha = y_0\beta \in \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad x_0 a = y_0 b.$$

Der Beweis dieser Behauptung ist leicht zu erbringen.

In den vorstehenden beinahe trivialen Sätzen sind die wichtigsten Rechengesetze enthalten, die Linksquotientenhalbgruppen zu beherrschen gestatten. An Hand dieser Sätze wird man fast zwanglos zu einem Konstruktionsverfahren einer Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zu vorgegebenen Halbgruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{H}$ geführt. Doch soll darauf hier nicht eingegangen werden (vgl. [3]).

§ 2. Einbettung von Halbgruppen in Quotientenhalbgruppen.

Gegeben seien eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit regulären Elementen und eine Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. Unter welchen Bedingungen existiert eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ von $\mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{m}$? Aus § 1, Folgerung zu Satz 1 entnimmt man sofort, daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ die folgende Eigenschaft haben müssen:

(1) Zu beliebigen $a \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$ gibt es $\alpha' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$, so daß $\alpha' a = a'\alpha$.

(Eine andere Formulierung dieser Bedingung: Für beliebige $a \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$ gilt stets $\mathfrak{m}a \cap \mathfrak{H}\alpha \neq 0$.)

Für Halbgruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ mit (1) beweist man durch vollständige Induktion leicht den wichtigen, im folgenden häufig anzuwendenden

Hilfssatz (MURATA [3], Lemma 1). *$\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ seien Halbgruppen, für die (1) erfüllt ist. Dann gibt es zu vorgegebenen Elementen $\alpha_i \in \mathfrak{m}$ stets Elemente $a_i \in \mathfrak{H}$ $(i = 1, \ldots, n)$, so daß*

$$a_1\alpha_1 = \cdots = a_n\alpha_n = \alpha \in \mathfrak{m}.$$

In dieser Gleichung lassen sich außerdem die a_i so wählen, daß zu vorgegebenem i_0 $(= 1$ oder $= \cdots$ oder $= n)$ a_{i_0} in $\mathfrak{m}$ liegt.

Der Hilfssatz kann unter anderem zum Beweis eines Satzes von MURATA über die Existenz von Linksquotientenhalbgruppen benutzt werden. Dieser Satz kann in folgender Form ausgesprochen werden:

Satz 1 (MURATA [3], Satz 1). *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit regulären Elementen, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. $\mathfrak{H}$ kann dann und nur dann in eine Linksquotientenhalbgruppe*

$\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *eingebettet*[2]) *werden, wenn zu beliebigen* $a \in \mathfrak{H}$, $\alpha \in \mathfrak{m}$ *stets* $\alpha' \in \mathfrak{m}$, $a' \in \mathfrak{H}$ *existieren, so daß*

$$\alpha' a = a' \alpha .$$

Eine solche Linksquotientenhalbgruppe ist durch $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{m}$ *bis auf Isomorphie bezüglich* $\mathfrak{H}$ *eindeutig bestimmt*[3]).

Satz 1 besagt unter anderem, daß unter den zu Beginn dieses Paragraphen gemachten Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ die Eigenschaft (1) auch hinreicht für die Einbettbarkeit von $\mathfrak{H}$ in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$. Da eine solche bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, kann man von *der* Linksquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{m}$ sprechen. Einen Beweis des Satzes 1 gibt MURATA [3]. In [3] wird $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zunächst für eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einselement konstruiert und der allgemeine Fall auf diesen Spezialfall zurückgeführt; indessen ist eine solche Fallunterscheidung nicht nötig.

Folgerung 1 („ORE scher Einbettungssatz"). Eine reguläre Halbgruppe $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann in eine Gruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ einbettbar, deren Elemente als Linksquotienten $\alpha^{-1}a$ von Elementen $\alpha, a \in \mathfrak{H}$ darstellbar sind, wenn je zwei Elemente aus $\mathfrak{H}$ ein gemeinsames Linksvielfaches besitzen. Die *Linksquotientengruppe* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ ist durch $\mathfrak{H}$ bis auf Isomorphie bezüglich $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. In Satz 1 ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{m}$ zu setzen. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ eine Gruppe ist. Zu diesem Zwecke stelle man das beliebige Element $A \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ als Linksquotient $\alpha^{-1}a$ (α, a geeignet $\in \mathfrak{H}$) dar. Wegen

$$(a^{-1}\alpha)(\alpha^{-1}a) = (\alpha^{-1}a)(a^{-1}\alpha) = \mathbf{1}$$

hat A dasjenige Element A^{-1} als inverses, das die Quotientendarstellung $a^{-1}\alpha$ besitzt.

Bemerkung 1. Folgerung 1 geht im wesentlichen auf ORE ([4], Sätze 1 und 2) zurück, wird aber dort für die Einbettung gewisser Ringe in Quotientenschiefkörper formuliert und bewiesen. — Reguläre Halbgruppen $\mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft, daß je zwei Elemente aus $\mathfrak{H}$ ein gemeinsames Linksvielfaches besitzen, werden in der Literatur bisweilen als *Oresche Halbgruppen* bezeichnet. Die Oreschen Halbgruppen (und diejenigen regulären Halbgruppen, in denen es zu je zwei Elementen ein gemeinsames Rechtsvielfaches gibt) sind nach dem Oreschen Einbettungssatz die allgemeinsten Halbgruppen, die noch durch eine Art Quotientenbildung in Gruppen eingebettet werden können.

---

[2]) Sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ Halbgruppen, so heiße $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{J}$ *einbettbar*, wenn $\mathfrak{J}$ eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe Unterhalbgruppe $\mathfrak{H}^*$ mit $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{H}^*$ enthält. Wenn dabei $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$, so sagt man, $\mathfrak{H}$ sei in $\mathfrak{J}$ *eingebettet*. Statt „$\mathfrak{H}$ ist einbettbar (eingebettet) in $\mathfrak{J}$" soll auch gesagt werden „$\mathfrak{H}$ läßt sich in $\mathfrak{J}$ einbetten", „$\mathfrak{H}$ kann in $\mathfrak{J}$ eingebettet werden".

[3]) Das heißt: Ist $\mathfrak{Q}_l'$ eine weitere Linksquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{m}$, so gibt es einen Isomorphismus von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ auf $\mathfrak{Q}_l'$, bei dem jedes Element aus $\mathfrak{H}$ auf sich selbst abgebildet wird.

Durch die Konstruktion von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ wird $\mathfrak{H}$ in eine Halbgruppe eingebettet. Es liegt die Frage nahe, ob $\mathfrak{m}$ durch diesen Einbettungsprozeß in eine Gruppe eingebettet wird, die Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist. Diese Frage ist unter speziellen Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ von VANDIVER ([6], Satz 1) bejahend beantwortet worden. In [6] wird vorausgesetzt, daß die Menge $\mathfrak{r}$ der regulären Elemente von $\mathfrak{H}$ im Zentrum[4]) von $\mathfrak{H}$ liegt und daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}$ ist. Wegen Satz 1 existiert die (Links-)*Quotientenhalbgruppe* $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$. In ihr bildet die Menge aller Elemente A, die in der Form $\beta/\alpha = \alpha^{-1}\beta = \beta\alpha^{-1}$ [5]) $(\alpha, \beta \in \mathfrak{m})$ darstellbar sind, eine im Zentrum von $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ liegende (ABELsche) Gruppe, die $\mathfrak{m}$ umfaßt.

Unter den allgemeineren in Satz 1 gemachten Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ ergibt sich der folgende Satz 2, der als Verallgemeinerung des erwähnten Satzes von VANDIVER aufgefaßt werden kann.

Satz 2. *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit regulären Elementen, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur aus regulären Elementen von $\mathfrak{H}$ besteht. Weiterhin lasse sich $\mathfrak{H}$ in die Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbetten. Dann läßt sich $\mathfrak{m}$ in eine Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ einbetten, die Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist und deren Elemente als Potenzprodukte von Elementen aus $\mathfrak{m}$ darstellbar sind.*

Beweis. Die Menge aller derjenigen Elemente A aus $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$, die sich in der Form

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\varepsilon_i} \quad \alpha_j \in \mathfrak{m}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

mit $n = 1, 2, \ldots$ darstellen lassen, bildet eine Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$, die $\mathfrak{m}$ umfaßt; $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ ist Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$.

Es sei noch eine andere interessante Formulierung für Satz 2 angegeben.

Folgerung 2. $\mathfrak{m}$ sei eine reguläre Halbgruppe. Läßt sich $\mathfrak{m}$ derart als Unterhalbgruppe einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ auffassen, daß 1. die Elemente von $\mathfrak{m}$ auch reguläre Elemente von $\mathfrak{H}$ sind, 2. zu $\alpha \in \mathfrak{m}$ und $a \in \mathfrak{H}$ stets $a' \in \mathfrak{H}$ und $\alpha' \in \mathfrak{m}$ mit $a'\alpha = \alpha' a$ existieren, so kann $\mathfrak{m}$ in eine Gruppe eingebettet werden. Jede solche Gruppe enthält eine Untergruppe, die isomorph einer gewissen Unterhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist und $\mathfrak{m}$ umfaßt.

Die Elemente A der in Satz 2 genannten Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ können stets in der Form $\alpha^{-1}a$ $(\alpha \in \mathfrak{m}, a \in \mathfrak{H})$ geschrieben werden, da $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ Unterhalbgruppe von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ ist. Dagegen kann man sie im allgemeinen nicht als $\alpha^{-1}\beta$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ schreiben. Vielmehr gilt

Satz 3. *Die Elemente A der in Satz 2 genannten Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ sind dann und nur dann in der Form $\alpha_1^{-1}\alpha_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{m}$ darstellbar, wenn zu beliebigen $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ stets $\beta', \alpha' \in \mathfrak{m}$ so existieren, daß*

$$\beta'\alpha = \alpha'\beta.$$

[4]) Zwei Elemente a, b einer Halbgruppe heißen vertauschbar, wenn $ab = ba$. Das *Zentrum* einer Halbgruppe besteht aus genau den Elementen, die mit allen Halbgruppenelementen vertauschbar sind.

[5]) Da die $\alpha \in \mathfrak{m}$ im Zentrum von $\mathfrak{H}$ liegen, entfällt die Unterscheidung von Linksquotienten $\alpha^{-1}a$ und Rechtsquotienten $a\alpha^{-1}$ $(\alpha \in \mathfrak{m}, a \in \mathfrak{H})$.

Beweis. 1. Die Bedingung ist notwendig. Sollen sich die Elemente A in der Form $\alpha_1^{-1}\alpha_2$ schreiben lassen, so muß offenbar $\beta\alpha^{-1} \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ $(\alpha, \beta$ beliebig $\in \mathfrak{m})$ auf diese Form gebracht werden können. Es muß also eine Gleichung der Form

$$\beta\alpha^{-1} = \alpha'^{-1}\beta' \qquad \alpha', \beta' \in \mathfrak{m}$$

bestehen, d.h. es muß $\beta', \alpha' \in \mathfrak{m}$ geben mit

$$\beta'\alpha = \alpha'\beta.$$

2. Die genannte Bedingung sei erfüllt. Dann kann man jedes Potenzprodukt aus n Faktoren $\beta_i^{\varepsilon_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ auf die Gestalt $\alpha_1^{-1}\alpha_2$ bringen. Denn für $n = 1$ trifft diese Behauptung offenbar zu wegen

$$\beta_1 = \alpha_1^{-1}(\alpha_1\beta_1), \qquad \beta_1^{-1} = (\alpha_2\beta_1)^{-1}\alpha_2;$$

und ist die Behauptung schon für Potenzprodukte von $n \geqq 1$ Faktoren bewiesen, so trifft sie auch für Potenzprodukte aus $n+1$ Faktoren $\beta_i^{\varepsilon_i}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ zu. Das letztere kann man wie folgt einsehen. In

$$\prod_{i=1}^{n+1} \beta_i^{\varepsilon_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i^{\varepsilon_i}\right) \cdot \beta_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}}$$

kann man nach Induktionsvoraussetzung

$$\prod_{i=1}^{n} \beta_i^{\varepsilon_i} = \bar{\alpha}_1^{-1}\,\bar{\alpha}_2 \qquad \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \in \mathfrak{m}$$

schreiben. Man hat daher

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i^{\varepsilon_i}\right)\beta_{n+1} = \bar{\alpha}_1^{-1}\,(\bar{\alpha}_2\beta_{n+1}),$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i^{\varepsilon_i}\right)\beta_{n+1}^{-1} = \bar{\alpha}_1^{-1}\,\bar{\alpha}_2\beta_{n+1}^{-1} = (\beta'_{n+1}\bar{\alpha}_1)^{-1}\bar{\alpha}'_2 \qquad \beta'_{n+1},\ \bar{\alpha}'_2 \in \mathfrak{m},$$

wobei

$$\beta'_{n+1}\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}'_2\beta_{n+1}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 2. Die Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ ist im allgemeinen echte Unterhalbgruppe der Halbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$. Auch wenn $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ selbst eine Gruppe ist, braucht nicht notwendig die Relation

$$\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m}) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$$

zu gelten.

Beispiel. Man bilde die Quaternionenalgebra $\mathfrak{R}$ über dem Ring $\mathfrak{C}$ der ganzen rationalen Zahlen. $\mathfrak{H}$ sei die multiplikative Halbgruppe der vom Nullelement verschiedenen $r \in \mathfrak{R}$: $\mathfrak{H} = (\mathfrak{R} - \{0\})^{\times}$; $\mathfrak{m}$ sei entsprechend die multiplikative Halbgruppe der von Null verschiedenen ganzen rationalen Zahlen: $\mathfrak{m} = (\mathfrak{C} - \{0\})^{\times}$. Dann ist $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ die multiplikative

Gruppe der Quaternionenalgebra über dem Körper der rationalen Zahlen. Dagegen ist $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ dem Typus nach gleich der multiplikativen Gruppe des Körpers der rationalen Zahlen.

§ 3. Topologische und metrische Halbgruppen.

§ 3 enthält die Definition von topologischen und metrischen Halbgruppen. Daneben werden einige für spätere Zwecke wichtige Eigenschaften solcher Strukturen mitgeteilt.

Definition 1. Eine Menge $\mathfrak{H}$ heiße eine *topologische Halbgruppe*, wenn

(i) $\mathfrak{H}$ eine Halbgruppe im Sinne des § 1 („*abstrakte Halbgruppe*") ist.

(ii) $\mathfrak{H}$ ein HAUSDORFF- (T_2-) Raum ist.

(iii) Die Halbgruppenoperation $(a, b) \to ab$ (d.h. die Multiplikation in $\mathfrak{H}$) stetig in beiden Veränderlichen a, b im Sinne der in (ii) geforderten Topologie ist.

Bedingung (iii) besagt dabei: Zu einer beliebigen offenen Umgebung U_{ab} des Punktes $ab \in \mathfrak{H}$ (a, b beliebig $\in \mathfrak{H}$) gibt es stets offene Umgebungen U_a, U_b der Punkte a, b mit

$$U_a U_b \subseteqq U_{ab}\ ^{6}).$$

Die obige Definition stammt von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT [*1*]; HILLE [*2*] verwendet statt des Terminus „topologische Halbgruppe" den Ausdruck „HAUSDORFFsche Halbgruppe".

Spezielle topologische Halbgruppen sind die topologischen Gruppen und die metrischen Halbgruppen.

Definition 2. Eine Menge $\mathfrak{G}$ heißt eine *topologische Gruppe*, wenn

(i) $\mathfrak{G}$ eine Gruppe („*abstrakte Gruppe*") ist.

(ii) $\mathfrak{G}$ ein HAUSDORFF- (T_2-) oder nur ein FRÉCHET- (T_1-) Raum ist[7]).

(iii) Die Gruppenoperationen, $(a, b) \to ab$ und $a \to a^{-1}$ (d.h. die Multiplikation und die Division in $\mathfrak{G}$), stetig sind im Sinne der in (ii) geforderten Topologie.

Die Stetigkeit der Division bedeutet bekanntlich, daß es zu $a \in \mathfrak{G}$ und zu einer beliebigen offenen Umgebung $U_{(a^{-1})}$ von a^{-1} stets eine offene Umgebung U_a von a gibt mit

$$(U_a)^{-1} \subseteqq U_{(a^{-1})}\ ^{6}).$$

Definition 3. Eine *metrische Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ ist eine topologische Halbgruppe, deren Topologie [vgl. Definition 1, (ii)] mittels einer Metrik $|a, b|$ ($a, b \in \mathfrak{H}$) eingeführt wird.

Diese Definition gibt HILLE [*2*] an.

Bemerkung. Auf Grund der vorstehenden Definition ist also eine (abstrakte) Halbgruppe $\mathfrak{H}$, die eine Metrik $|a, b|$ ($a, b \in \mathfrak{H}$) trägt, nicht

[6]) Sind $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ nichtleere Teilmengen einer Halbgruppe, so bedeutet $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$ die Menge aller Produkte $h_1 h_2$ mit $h_1 \in \mathfrak{H}_1$, $h_2 \in \mathfrak{H}_2$. Ist $\mathfrak{A}$ eine nichtleere Teilmenge einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so versteht man unter $\mathfrak{A}^{-1}$ die Menge aller x aus $\mathfrak{G}$ mit $x^{-1} \in \mathfrak{A}$.

[7]) Falls $\mathfrak{G}$ nur als T_1-Raum vorausgesetzt wird, kann man in Verbindung mit (i) und (iii) zeigen, daß $\mathfrak{G}$ ein regulärer Raum, also ein T_2-Raum ist. (Vgl. hierzu etwa PONTRJAGIN [*5*], § 16.)

notwendig bereits eine metrische Halbgruppe. Vielmehr muß diese Metrik so beschaffen sein, daß die Multiplikation in $\mathfrak{H}$ stetig ist in beiden Faktoren, daß also

$$\text{Aus } a_n \to a \quad \text{und} \quad b_n \to b \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \text{folgt} \quad a_n b_n \to a b \quad \text{für} \quad n \to \infty .$$

Die Konvergenz (etwa $a_n \to a$) ist dabei im Sinne der Metrik $|a, b|$ zu verstehen.

Die Theorie der topologischen und metrischen Halbgruppen umfaßt offenbar die der abstrakten Halbgruppen, wenn man diese letzteren als diskret topologisierte topologische oder metrische Halbgruppen auffaßt. (Ein topologischer Raum heißt *diskret*, wenn jede Teilmenge offen ist. Die diskrete Topologie eines Raumes erhält man z.B. mittels einer Metrik, indem man

$$|a, a| = 0, \quad |a, b| = 1 \qquad a \neq b$$

setzt.)

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich solche topologische Halbgruppen untersucht, die man als metrische Halbgruppen auffassen kann.

Eine wichtige Klasse von metrischen Halbgruppen sind diejenigen Halbgruppen $\mathfrak{H}$, die eine *invariante Metrik* $|a, b|$, d.h. eine Metrik, für die

$$|\alpha a, \alpha b| = |a, b| = |a\alpha, b\alpha| \qquad a, b, \alpha \in \mathfrak{H},$$

gilt, tragen. Jede Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit invarianter Metrik ist eine metrische Halbgruppe mit Kürzungsregel; Invarianz der Metrik bedeutet demnach eine wesentliche Einschränkung für die zugrunde gelegten Halbgruppen [vgl. a. § 4, Folgerungen 1, 2].

Nach § 1 stellt die Annahme, eine abstrakte Halbgruppe besitze ein Einselement, keine wesentliche Einschränkung dar, da man notfalls eine Halbgruppenidentität adjungieren kann. Bei topologischen Halbgruppen $\mathfrak{H}$ scheinen die Verhältnisse verwickelter zu sein. Enthält $\mathfrak{H}$ nämlich kein Einselement, so handelt es sich nicht nur darum, ein Element zu adjungieren, das in algebraischer Hinsicht die Rolle des Einselements übernehmen kann, sondern es kommen noch topologische Forderungen hinzu, denen man nicht so leicht Genüge leisten kann.

Satz 1. *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe ohne Identität; $\mathfrak{H}$ trage eine invariante Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$. Auf der aus $\mathfrak{H}$ durch Adjunktion eines Elementes* **1** *entstehenden Halbgruppe $\mathfrak{H}^*$ mit dem Einselement* **1** *läßt sich dann und nur dann eine invariante Metrik $\|a, b\|$ $(a, b \in \mathfrak{H}^*)$ — und zwar auf genau eine Weise — einführen, daß*

$$\|a, b\| = |a, b| \qquad \text{für} \quad a, b \in \mathfrak{H},$$

wenn für beliebige $a, b \in \mathfrak{H}$

$$|a, a b| = |a, b a| . \tag{1}$$

Beweis. 1. Gibt es auf $\mathfrak{H}^*$ eine Metrik $\|a, b\|$ $(a, b \in \mathfrak{H}^*)$ mit den geforderten Eigenschaften, so muß offenbar für alle $a, b \in \mathfrak{H}$

$$|a, b a| = \|a, b a\| = \|\mathbf{1}, b\| = \|a, a b\| = |a, a b|$$

sein.

2. Hat eine Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ die Eigenschaft, daß für alle $a, b \in \mathfrak{H}$

$$|a, ab| = |a, ba|,$$

so gilt für beliebige $b, c, d \in \mathfrak{H}$

$$|c, cb| = |cd, cbd| = |d, bd| = |d, db|.$$

Daher wird durch

$$\|a, b\| = \|b, a\| = \begin{cases} |a, b| & \text{falls} \quad a, b \in \mathfrak{H} \\ |c, cb| & \text{falls} \quad a = \mathbf{1},\ b, c \in \mathfrak{H} \\ |c, c| & \text{falls} \quad a = b = \mathbf{1},\ c \in \mathfrak{H} \end{cases}$$

auf $\mathfrak{H}^* \times \mathfrak{H}^*$ eine eindeutige Funktion definiert. Diese Funktion ist eine invariante Metrik von $\mathfrak{H}^*$, wie man durch einige Rechnungen bestätigen kann. Offenbar ist $\|a, b\|$ $(a, b \in \mathfrak{H}^*)$ *Fortsetzung* von $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$, d.h. es ist

$$\|a, b\| = |a, b| \qquad a, b \in \mathfrak{H}.$$

Daß es keine weitere Metrik von $\mathfrak{H}^*$ gibt, die die auf $\mathfrak{H}$ vorgegebene Metrik in gewünschter Weise fortsetzt, folgt aus 1.

Man beachte, daß (1) nicht die Kommutativität von $\mathfrak{H}$ nach sich zieht. Abschließend sei noch ein Beispiel einer topologischen Halbgruppe behandelt, auf das später mehrfach Bezug genommen werden wird.

Beispiel. Die multiplikative (Halb-)Gruppe der positiven reellen Zahlen wird zu einer topologischen (Halb-)Gruppe mit invarianter Metrik vermöge

$$|a, b| = |\log a - \log b| \qquad a, b \text{ reell}, > 0.$$

Die durch diese Metrik im Raume der positiven reellen Zahlen eingeführte Topologie ist der gewöhnlichen Topologie dieses Raumes[8]) äquivalent, führt also insbesondere zu dem gleichen Offenheitsbegriff. Um das einzusehen, betrachte man die folgenden Mengen

$$U_\varepsilon(a) = \{x : 0 \leqq |a - x| < \varepsilon \leqq a\},$$
$$V_\eta(a) = \{y : 0 \leqq |\log a - \log y| < \eta,\ a, y > 0\}.$$

Eine leichte Rechnung lehrt, daß die Ungleichungen bestehen:

$$U_\varepsilon(a) \subseteqq V_\eta(a), \quad 0 < \varepsilon < \operatorname{Min}\{a(e^\eta - 1), a(1 - e^{-\eta})\},$$
$$V_\eta(a) \subseteqq U_\varepsilon(a), \qquad 0 < a \cdot \mathfrak{Sin}\,\eta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man erkennt weiter aus den eben angestellten Überlegungen: Führt man auf einem Unterraum $\mathfrak{R}$ des Raums der positiven reellen Zahlen diejenige Topologie ein, die durch Relativierung aus der gewöhnlichen Topologie des Raumes der positiven reellen Zahlen auf $\mathfrak{R}$ entsteht, so ist diese Topologie äquivalent

[8]) Die gewöhnliche Topologie dieses Raumes hat bekanntlich die Klasse aller offenen Intervalle $(a - c, a + c)$, $0 < c < a$, als eine Basis der offenen Mengen.

der Topologie, die durch die Metrik

$$|a, b| = |\log a - \log b| \qquad a, b \in \mathfrak{R}$$

auf $\mathfrak{R}$ erzeugt wird. Daraus ergibt sich insbesondere, daß die multiplikative Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen bzw. die multiplikative (Halb-)Gruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ der positiven rationalen Zahlen — beide invariant metrisiert durch $|a, b| = |\log a - \log b|$, wobei $a, b \in \mathfrak{Z}$ bzw. $\in \mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ — eine diskrete bzw. eine nichtdiskrete metrische Halbgruppe bildet. Da $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ vom abstrakt-algebraischen Standpunkte die Quotientengruppe von $\mathfrak{Z}$ ist, folgt

Satz 2. *Die Quotienten(halb)gruppe einer diskreten (kommutativen) topologischen Halbgruppe braucht nicht notwendig diskret zu sein.*

§ 4. Invariante Fortsetzung der Metrik von Halbgruppen auf deren Quotientenhalbgruppen.

In §§ 1 bis 3 wurden die wichtigsten Tatsachen über abstrakte und topologische Halbgruppen entwickelt, die zur Behandlung des Hauptproblems der vorliegenden Arbeit benötigt werden. Dieses Hauptproblem ist ein spezielles Einbettungsproblem für metrische Halbgruppen, auf das man durch folgenden Gedankengang geführt wird: Gegeben sei eine metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ (vgl. § 3, Definition 3). $\mathfrak{H}$ als abstrakte Halbgruppe aufgefaßt, möge sich in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbetten lassen [$\mathfrak{m}$ bedeutet wie üblich eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$, die nur reguläre Elemente von $\mathfrak{H}$ enthält; vgl. a. § 1, Definition]. Es soll auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ eine Metrik definiert werden, so daß

1. $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zu einer metrischen Halbgruppe wird[9]);

2. die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in einem noch genauer zu definierenden Sinne (vgl. § 5, Definition) in die metrische Halbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ eingebettet wird.

Diesem keineswegs trivialen *Einbettungsproblem* sind dieser und die folgenden Paragraphen gewidmet. Es wird sich ergeben, daß man unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen über die Metrik von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ eine Metrik so finden kann, daß die Eigenschaften 1. und 2. erfüllt sind. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, zunächst statt der obigen Einbettungsaufgabe das folgende *Fortsetzungsproblem* zu behandeln: Es ist eine auf einer abstrakten Halbgruppe $\mathfrak{H}$ gegebene Metrik auf die Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ fortzusetzen ($\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{m}$ wie oben). *Fortsetzung* einer Metrik $|a_1, b_1|_1$ eines Raumes M_1 auf einen Oberraum M_2 nennt man dabei jede Metrik $|a_2, b_2|_2$ von M_2, für die

$$|a_1, b_1|_1 = |a_1, b_1|_2 \qquad a_1, b_1 \in M_1$$

gilt.

Der Inhalt des § 4 bezieht sich vorwiegend auf das eben aufgeworfene Fortsetzungsproblem. Die hier gewonnenen Resultate werden in § 5 zur Lösung des Einbettungsproblems benutzt.

[9]) Man beachte: eine abstrakte Halbgruppe mit einer Metrik ist im allgemeinen noch keine metrische Halbgruppe.

Es liegt nahe, zuerst die Fortsetzung einer *invarianten* Metrik $|a, b|$ von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zu versuchen. Wie schon in § 3 bemerkt, kann es invariante Metriken nur auf regulären Halbgruppen geben. Für nicht notwendig reguläre Halbgruppen empfiehlt es sich, ein Analogon des Begriffs „invariante Metrik" einzuführen.

Definition. $\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit einer Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$, $\mathfrak{m}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathfrak{H}$. Die Metrik $|a, b|$ heiße *bezüglich* $\mathfrak{m}$ *linksinvariant*, wenn für beliebige $a, b \in \mathfrak{H}$ und für alle $\alpha \in \mathfrak{m}$

$$|\alpha a, \alpha b| = |a, b|$$

gilt. Entsprechend sind die Begriffe *bezüglich* $\mathfrak{m}$ *rechtsinvariant*, *bezüglich* $\mathfrak{m}$ *invariant* zu definieren.

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe mit einer bezüglich einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{H}$ linksinvarianten Metrik. Dann sind die Elemente von $\mathfrak{m}$ notwendig linksseitig reguläre Elemente von $\mathfrak{H}$*[10]*. Eine analoge Aussage gilt für bezüglich $\mathfrak{m}$ rechtsinvariante und bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Metriken auf $\mathfrak{H}$.*

Beweis. (Nur für den ersten Teil des Hilfssatzes.) Sei

$$\bar{\alpha} a = \bar{\alpha} b \qquad \bar{\alpha} \in \mathfrak{m},\ a, b \in \mathfrak{H}.$$

Dann hat man

$$|a, b| = |\bar{\alpha} a, \bar{\alpha} b| = 0,$$

$$a = b.$$

Folgerung 1. Eine Halbgruppe mit invarianter Metrik ist regulär.

Hilfssatz 2. *Eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ trage eine Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$, die bezüglich einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{H}$ invariant ist. Dann gilt:*

a) Aus $\alpha_n \to a$ und $b_n \to \beta$ für $n \to \infty$ folgt $\alpha_n b_n \to a\beta$ für $n \to \infty$.

b) Aus $a_n \to \alpha$ und $\beta_n \to b$ für $n \to \infty$ folgt $a_n \beta_n \to \alpha b$ für $n \to \infty$.

Dabei sind $\alpha_n, \beta_n, \alpha, \beta \in \mathfrak{m}$, $a_n, b_n, a, b \in \mathfrak{H}$, und die Konvergenz (z. B. $a_n \to \alpha$) ist im Sinne der vorgegebenen Metrik zu verstehen.

Beweis. Die Richtigkeit der Behauptung a) erkennt man sofort aus

$$|\alpha_n b_n, a\beta| \leq |\alpha_n b_n, \alpha_n \beta| + |\alpha_n \beta, a\beta| = |b_n, \beta| + |\alpha_n, a|.$$

b) wird ganz entsprechend bewiesen.

Folgerung 2. Sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt, so bildet die Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{H}$ eine metrische Halbgruppe mit invarianter Metrik. Speziell ist also jede Halbgruppe mit invarianter Metrik eine metrische Halbgruppe[11]).

Satz 1. *$\mathfrak{H}$ sei eine in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbettbare Halbgruppe (vgl. § 1, Definition, § 2, Satz 1). $\mathfrak{H}$ trage eine bezüglich $\mathfrak{m}$ linksinvariante Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$. Diese Metrik läßt sich genau dann*

[10]) Das heißt sie sind solche Elemente $\alpha \in \mathfrak{H}$, die der Kürzungsregel (1) aus § 1 genügen.

[11]) Der zweite Teil von Folgerung 2 findet sich im wesentlichen bei GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT ([1], unmittelbar vor Satz 15).

— *und zwar auf eine und nur eine Weise — zu einer Metrik auf* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H};\mathfrak{m})$ *fortsetzen, die bezüglich* $\mathfrak{m}$ *linksinvariant ist, wenn für jedes* $x^\times \in \mathfrak{H}$ *mit* $x^\times \alpha \in \mathfrak{H}$ (α *ein gewisses Element aus* $\mathfrak{m}$) *die Gleichung*

$$|x^\times a, x^\times b| = |a, b| \qquad a, b \text{ beliebig } \in \mathfrak{H}$$

erfüllt ist. Die bezüglich $\mathfrak{m}$ linksinvariante Fortsetzung *von* $|a, b|$ *wird gegeben durch*

$$\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| = |\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b| = |xa, yb|, \qquad \text{wobei} \qquad x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}.$$

Beweis. a) Angenommen, die gewünschte Fortsetzung sei möglich. Wählt man zu $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ $x, y \in \mathfrak{H}$ so, daß $x\alpha = y\beta = \bar{\mu} \in \mathfrak{m}$, so gilt offenbar

$$\begin{aligned}\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| &= \|(x\alpha)^{-1}(xa), (y\beta)^{-1}(yb)\| \\ &= \|\bar{\mu}(x\alpha)^{-1}(xa), \bar{\mu}(y\beta)^{-1}(yb)\| = \|xa, yb\| = |xa, yb|.\end{aligned}$$

Es ist demnach höchstens eine solche Fortsetzung möglich. Weiter muß noch

$$\begin{aligned}|a, b| &= \|a, b\| = \|\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b\| \\ &= \|(x^\times\alpha)^{-1}(x^\times a), (x^\times\alpha)^{-1}(x^\times b)\| = \|x^\times a, x^\times b\| = \|x^\times a, x^\times b|\end{aligned}$$

bei beliebigen $a, b \in \mathfrak{H}$, beliebigem $\alpha \in \mathfrak{m}$ und $x^\times \in \mathfrak{H}$ mit $x^\times\alpha \in \mathfrak{m}$ gelten. Das liefert die Bedingung

$$|a, b| = |x^\times a, x^\times b| \qquad x^\times\alpha \in \mathfrak{m}.$$

b) Die eben erhaltene (notwendige) Bedingung sei erfüllt. Sie reicht auch hin, die Metrik $|a, b|$ in gewünschter Weise fortzusetzen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Zunächst hat man

$$|xa, yb| = |\bar{x}a, \bar{y}b|,$$

wenn $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathfrak{H}$ und wenn

$$x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}, \qquad \bar{x}\alpha = \bar{y}\beta \in \mathfrak{m}.$$

Man wähle nämlich $\mu \in \mathfrak{m}$, $n \in \mathfrak{H}$ so, daß $\mu(x\alpha) = n(\bar{x}\alpha) \in \mathfrak{m}$. Dann folgt

$$\begin{gathered}\mu x = n\bar{x}, \qquad \mu y = n\bar{y}, \\ |xa, yb| = |\mu xa, \mu yb| = |n\bar{x}a, n\bar{y}b| = |\bar{x}a, \bar{y}b|,\end{gathered}$$

weil ja $n(\bar{x}\alpha) \in \mathfrak{m}$ und $(\bar{x}\alpha) \in \mathfrak{m}$.

Weiterhin ergibt sich: Aus

$$\alpha^{-1}a = \alpha_1^{-1}a_1, \qquad \beta^{-1}b = \beta_1^{-1}b_1, \qquad x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}, \qquad x_1\alpha_1 = y_1\beta_1 \in \mathfrak{m}$$

folgt

$$|xa, yb| = |x_1a_1, y_1b_1|.$$

Beim Beweis beachte man, daß es nach dem eben Bewiesenen genügt, diese Gleichung nur für ein spezielles Quadrupel $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ mit $\tilde{x}\alpha = \tilde{y}\beta \in \mathfrak{m}$, $\tilde{x}_1\alpha_1 = \tilde{y}_1\beta_1 \in \mathfrak{m}$ zu verifizieren. Nach § 2, Hilfssatz, kann man ein solches Quadrupel stets so wählen, daß überdies

$$\tilde{x}\alpha = \tilde{y}\beta = \tilde{x}_1\alpha_1 = \tilde{y}_1\beta_1 \in \mathfrak{m}.$$

Wegen § 1, Satz 4, folgt hieraus und aus den Gleichungen

$$\alpha^{-1}a = \alpha_1^{-1}a_1, \quad \beta^{-1}b = \beta_1^{-1}b_1,$$

daß

$$\tilde{x}a = \tilde{x}_1 a_1, \quad \tilde{y}b = \tilde{y}_1 b_1,$$

also auch

$$|\tilde{x}a, \tilde{y}b| = |\tilde{x}_1 a_1, \tilde{y}_1 b_1|.$$

Aus diesen Überlegungen erkennt man, daß durch

$$(1) \qquad \|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| = |xa, yb| \quad x\alpha = y\beta \in \mathfrak{m}$$

eine eindeutige Funktion der Elemente von $\mathfrak{Q}_l \times \mathfrak{Q}_l$ definiert wird. Die Funktion (1) ist eine Metrik von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$. Man braucht nur nachzuprüfen, daß

$$(2) \qquad \text{aus} \quad \|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| = 0 \quad \text{folgt} \quad \alpha^{-1}a = \beta^{-1}b \quad \text{(und umgekehrt)},$$

$$(3) \qquad \|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| \leq \|\alpha^{-1}a, \gamma^{-1}c\| + \|\gamma^{-1}c, \beta^{-1}b\|.$$

Die Richtigkeit von (2) entnimmt man sofort aus (1) und aus § 1, Satz 4, während sich (3) auf Grund der Definition der Metrik $\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\|$ in der Form

$$(3') \qquad |xa, yb| \leq |xa, zc| + |zc, yb|$$

schreiben läßt, wenn für $x, y, z \in \mathfrak{H}$ noch

$$x\alpha = y\beta = z\gamma \in \mathfrak{m}$$

gilt, was nach § 2, Hilfssatz, durch geeignete Wahl der x, y, z stets erreicht werden kann. (3') ist offenbar richtig.

Ferner bestehen die Gleichungen

$$(4') \qquad \|\delta A, \delta B\| = \|A, B\| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l, \ \delta \in \mathfrak{m},$$

$$(4'') \qquad \|\gamma^{-1}A, \gamma^{-1}B\| = \|A, B\| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l, \ \gamma \in \mathfrak{m}.$$

Um (4'), (4'') zu verifizieren, stelle man A, B als Linksquotienten mit gleichem Linksnenner dar, $A = \alpha^{-1}a$, $B = \alpha^{-1}b$. (Nach § 2, Hilfssatz und nach § 1, Satz 3 kann man zwei Linksquotienten durch „Erweitern" stets auf gleichen Linksnenner bringen.) Man bestimme zu $\alpha, \delta \in \mathfrak{m}$ $d' \in \mathfrak{H}$ und $\alpha' \in \mathfrak{m}$ mit $d'\alpha = \alpha'\delta$; wegen

$$\delta\alpha^{-1}a = \alpha'^{-1}d'a, \quad \delta\alpha^{-1}b = \alpha'^{-1}d'b$$

hat man dann

$$\|\delta(\alpha^{-1}a), \delta(\alpha^{-1}b)\| = \|\alpha'^{-1}d'a, \alpha'^{-1}d'b\| = |d'a, d'b| = \|\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b\|,$$

also auch (4'), während (4'') sofort erhalten wird aus

$$\|\gamma^{-1}(\alpha^{-1}a), \gamma^{-1}(\alpha^{-1}b)\| = \|(\alpha\gamma)^{-1}a, (\alpha\gamma)^{-1}b\| = |a, b| = \|\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b\|.$$

Schließlich muß noch die Metrik $\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\|$ als Fortsetzung der Metrik $|a, b|$ erkannt werden. Um nachzuweisen, daß

$$\|a, b\| = |a, b| \qquad a, b \in \mathfrak{H},$$

braucht man nur auf der linken Seite die Elemente $a, b \in \mathfrak{H}$ als Linksquotienten zu schreiben (die Metrik auf $\mathfrak{Q}_l$ war ja für die „Linksquotientendarstellung" $\alpha^{-1}a$ der Elemente $A \in \mathfrak{Q}_l$ definiert worden). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man die Darstellungen $\alpha^{-1}(\alpha a), \alpha^{-1}(\alpha b)$ für a, b benutzen. Die Behauptung folgt dann aus

$$\|\alpha^{-1}(\alpha a), \alpha^{-1}(\alpha b)\| = |\alpha a, \alpha b| = |a, b|.$$

Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

Da die in Satz 1 eingeführte Metrik $\|A, B\|$ auf $\mathfrak{Q}_l$ $(A, B \in \mathfrak{Q}_l)$ Fortsetzung der Metrik $|a, b|$ auf $\mathfrak{H}$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ ist, kann man

$$\|A, B\| = |A, B| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l$$

schreiben. Diese Schreibweise wird im folgenden stets benutzt.

Folgerung 3. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, und $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ lasse sich bezüglich $\mathfrak{m}$ linksinvariant auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ fortsetzen. Dann gilt für diese Fortsetzung $|A, B|$ $(A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}))$ sogar

$$|AA, AB| = |A, B| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}),\ A \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m}),$$

d.h. $|A, B|$ ist bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ linksinvariant (vgl. zu dieser Bezeichnung § 2, Satz 2).

Beweis. Die Elemente A können als Potenzprodukte von Elementen aus $\mathfrak{m}$ dargestellt werden. Die Behauptung folgt daher unter Benutzung der Gln. (4') und (4'').

Für eine bezüglich $\mathfrak{m}$ *invariante* Metrik auf $\mathfrak{H}$ lassen sich die eben gewonnenen Resultate verschärfen:

Satz 2. *$\mathfrak{H}$ sei eine Halbgruppe, die in eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ einbettbar ist. Ferner trage $\mathfrak{H}$ eine bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$. Diese Metrik läßt sich genau dann — und zwar auf eine und nur eine Weise — zu einer Metrik von $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ fortsetzen, die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant ist, wenn für jedes $x^{\times} \in \mathfrak{H}$ mit $x^{\times}\alpha \in \mathfrak{m}$ und für jedes $y^{\times} \in \mathfrak{H}$ mit $\beta y^{\times} \in \mathfrak{m}$ (α, β gewisse Elemente aus $\mathfrak{m}$) die Gleichung*

$$|x^{\times}a, x^{\times}b| = |a, b| = |a\,y^{\times}, b\,y^{\times}| \qquad a, b \text{ beliebig} \in \mathfrak{H}$$

erfüllt ist. Die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzung *von $|a, b|$ wird wie in Satz 1 gegeben durch*

$$\|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b\| = |\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b| = |x\,a, y\,b|, \qquad \text{wobei } x\,a = y\beta \in \mathfrak{m}.$$

Beweis. a) Ist die Fortsetzung in der gewünschten Weise möglich, so muß wegen

$$b\beta^{-1} = (b\,y^{\times})(\beta\,y^{\times})^{-1}, \qquad \beta\,y^{\times} \in \mathfrak{m}$$

(vgl. § 1, Satz 3)

$$|a, b| = |a\beta^{-1}, b\beta^{-1}| = |a\,y^{\times}(\beta\,y^{\times})^{-1}, b\,y^{\times}(\beta\,y^{\times})^{-1}| = |a\,y^{\times}, b\,y^{\times}|$$

gelten, wenn a, b beliebig aus $\mathfrak{H}$, β beliebig aus $\mathfrak{m}$ und $\beta y^{\times}$ aus $\mathfrak{m}$. Wegen Satz 1 ist damit die in Satz 2 angegebene Bedingung als notwendig für eine Fortsetzung von $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ erkannt, die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant ist.

b) Die eben erwähnte Bedingung sei erfüllt. Nach Satz 1 kann man dann die Metrik $|a, b|$ bezüglich $\mathfrak{m}$ linksinvariant auf $\mathfrak{Q}_l$ fortsetzen, und zwar besteht der oben (Satz 1, Satz 2) angegebene Zusammenhang zwischen den Metriken $|a, b|$ und $|A, B|$ $(a, b \in \mathfrak{H}, A, B \in \mathfrak{Q}_l)$. Es ist nur noch festzustellen, daß

$$|A, B| = |A\delta, B\delta| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l,\ \delta \in \mathfrak{m} \tag{5'}$$

gilt. Diese Gleichung kann man sofort verifizieren, indem man A und B als Linksquotienten darstellt.

Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 4. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt, und $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ lasse sich bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ fortsetzen. Dann gilt für die Fortsetzung $|A, B|$ $\left(A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})\right)$ sogar

$$|AA, AB| = |A, B| = |AA, BA| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m}),\ A \in \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m}),$$

d.h. $|A, B|$ ist bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant.

Beweis. Aus (5') folgt noch

$$|A, B| = |A\gamma^{-1}, B\gamma^{-1}| \qquad A, B \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{m}),\ \gamma \in \mathfrak{m}, \tag{5''}$$

weil nach (5') offenbar

$$|A, B| = |A(\gamma^{-1}\gamma), B(\gamma^{-1}\gamma)| = |A\gamma^{-1}, B\gamma^{-1}|.$$

Da die Elemente A aus $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ als Potenzprodukte von Elementen aus $\mathfrak{m}$ aufgefaßt werden können, schließt man wegen (5') und (5'') auf die Behauptung.

Satz 3. *Erfüllt eine Metrik $|a, b|$ auf $\mathfrak{H}$ neben den in Satz 2 genannten Bedingungen für eine bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzbarkeit auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ noch die folgenden*

$$|ca, cb| \leq K|a, b|$$

und

$$|ac, bc| \leq K|a, b|$$

$(a, b, c$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{H}$, K eine reelle Konstante $\geq 1)$, so gilt für beliebige $A, B, C \in \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$

$$|CA, CB| \leq K|A, B|$$

und

$$|AC, BC| \leq K|A, B|.$$

Beweis. Aus den Sätzen 1 und 2 folgt, daß man die beiden letzten Ungleichungen nur für $C = c \in \mathfrak{H}$, $A = \alpha^{-1}a$, $B = \beta^{-1}b$ zu bestätigen braucht. Dabei kann man noch $\alpha = \beta$ voraussetzen (vgl. den Beweis des Satzes 1). Wählt man nun $c' \in \mathfrak{H}$, $\alpha' \in \mathfrak{m}$ mit $c'\alpha = \alpha' c$, so erhält man

$$|c(\alpha^{-1}a), c(\alpha^{-1}b)| = |\alpha'^{-1}(c'a), \alpha'^{-1}(c'b)| = |c'a, c'b| \leq K|a, b| = K|\alpha^{-1}a, \alpha^{-1}b|$$

Damit ist die erste der Ungleichungen verifiziert. Bei der zweiten schließt man ähnlich.

Die in diesem Paragraphen entwickelten Sätze enthalten wichtige Einbettungsaussagen über metrische Halbgruppen, unter anderem einen Satz von Gelbaum, Kalisch und Olmstedt über die Einbettung metrischer Halbgruppen in Quotientengruppen ([1], Satz 15). In § 5 soll die Bedeutung der obigen Sätze für das Einbettungsproblem herausgearbeitet werden.

§ 5. Deutung der Ergebnisse aus § 4 als Einbettungsaussagen über metrische Halbgruppen.

Die Sätze des § 4, die sich auf die invariante Fortsetzung einer Metrik $|a, b|$ einer Halbgruppe $\mathfrak{H}$ auf eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ beziehen, liefern eine Methode zur Einbettung gewisser metrischer Halbgruppen und können zur Lösung des Einbettungsproblems aus § 4 herangezogen werden. Das soll in § 5 gezeigt werden.

Definition. Eine topologische (metrische) Halbgruppe $\mathfrak{H}$ heiße in eine topologische (metrische) Halbgruppe $\mathfrak{J}$ *einbettbar*, wenn die folgenden Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind:

(i) $\mathfrak{H}$ ist als abstrakte Halbgruppe in $\mathfrak{J}$ einbettbar[12]); $\mathfrak{J}$ enthält also eine Unterhalbgruppe $\mathfrak{H}^*$ mit

$$\mathfrak{H} \cong \mathfrak{H}^* \qquad \mathfrak{H} \cap \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{H}^*.$$

(ii) Ist σ der von $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H}^*$ führende Isomorphismus [vgl. (i)],

$$\mathfrak{H}\sigma = \mathfrak{H}^*,$$

so soll die Abbildung σ zugleich eine Homöomorphie der Räume $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ vermitteln. Dabei ist $\mathfrak{H}^*$ als Relativraum von $\mathfrak{J}$ zu topologisieren.

Speziell heiße eine topologische (metrische) Halbgruppe $\mathfrak{H}$ in eine topologische (metrische) Halbgruppe $\mathfrak{J}$ *eingebettet*, wenn in (i), (ii) die abstrakten Halbgruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ identisch sind. Die Termini „$\mathfrak{H}$ läßt sich in $\mathfrak{J}$ einbetten", „$\mathfrak{H}$ kann in $\mathfrak{J}$ eingebettet werden" sollen wie bei abstrakten Halbgruppen verwendet werden[12]).

Die Einbettung abstrakter Halbgruppen ordnet sich der obigen Definition unter, wenn man abstrakte Halbgruppen als diskret topologisierte topologische Halbgruppen auffaßt.

Gegeben seien die metrischen Halbgruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$. Wenn $\mathfrak{H}$ als abstrakte Halbgruppe Unterhalbgruppe der abstrakten Halbgruppe $\mathfrak{J}$ ist und wenn die Metrik von $\mathfrak{J}$ Fortsetzung der Metrik von $\mathfrak{H}$ ist, so ist die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ im Sinne der vorstehenden Definition in die metrische Halbgruppe $\mathfrak{J}$ eingebettet. Dies läßt sich leicht zeigen.

Hilfssatz 1. *Jede (abstrakte) Gruppe mit invarianter Metrik ist eine topologische Gruppe.*

[12]) Vgl. § 2, Fußnote 2.

Beweis. Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ eine invariante Metrik auf $\mathfrak{G}$, so muß nach § 4, Folgerung 2 die Gruppenmultiplikation stetig sein. Daß auch die Division, $a \to a^{-1}$ $(a \in \mathfrak{G})$, stetig ist, erkennt man sofort aus

$$|a, b| = |a^{-1}, b^{-1}|.$$

Hilfssatz 2. *Wenn eine (abstrakte) Halbgruppe $\mathfrak{H}$ eine Metrik $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ trägt, für die*

$$|ca, cb| \leq K|a, b|$$

und

$$|ac, bc| \leq K|a, b|$$

gilt (K eine positive reelle Konstante, a, b, c beliebig $\in \mathfrak{H}$), so ist $\mathfrak{H}$ eine metrische Halbgruppe.

Beweis. Konvergieren die Folgen $\{a_n\}$ bzw. $\{b_n\}$ gegen a bzw. gegen b im Sinne der vorgegebenen Metrik $(a_n, b_n, a, b \in \mathfrak{H})$, so konvergiert die Folge $\{a_n b_n\}$ gegen ab. Wegen der Dreiecksungleichung hat man nämlich

$$|a_n b_n, ab| \leq |a_n b_n, a_n b| + |a_n b, ab| \leq K(|b_n, b| + |a_n, a|).$$

Die Sätze aus § 4 sollen nun als Einbettungsaussagen über metrische Halbgruppen gedeutet werden.

Wenn in § 4, Satz 1 oder § 4, Satz 2 $\mathfrak{H}$ kommutativ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{H}$ sind, so erhält man

Satz 1. *Jede kommutative reguläre topologische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit einer invarianten Metrik $|a, b|$ läßt sich in die* Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ *derart einbetten, daß $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ eine topologische Gruppe mit invarianter Metrik wird, wobei diese Metrik $\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right|$ die invariante Fortsetzung der Metrik von $\mathfrak{H}$ ist und mit dieser zusammenhängt gemäß*

$$\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right| = |\beta a, \alpha b| \qquad \alpha, \beta, a, b \in \mathfrak{H}.$$

Beweis. Nach § 4, Satz 2 ist die Metrik $\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right|$ die bezüglich $\mathfrak{H}$ invariante Fortsetzung der Metrik $|a, b|$ von $\mathfrak{H}$ auf die Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$. $\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right|$ muß nach § 4, Folgerung 4 bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{H})$[13]) invariante Fortsetzung von $|a, b|$ sein. Wegen

$$\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{H}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$$

ist $\left|\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right|$ die invariante Fortsetzung von $|a, b|$ auf die Gruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$. In diese ist offenbar die metrische Halbgruppe eingebettet.

Bemerkung 1. Satz 1 enthält eine Verallgemeinerung der wesentlichsten Teile des in § 4 erwähnten Satzes von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT ([1] Satz 15). Diese Autoren können den Schluß, daß eine metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ von der in Satz 1 genannten Art in ihre Quotientengruppe einbettbar ist

[13]) Vgl. § 2, Satz 2.

nur unter gewissen Zusatzvoraussetzungen ziehen, die durch das in [1] verwendete Beweisverfahren bedingt zu sein scheinen. Eine Besprechung dieses Satzes von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT sowie seiner Beweisidee erfolgt in § 6.

Satz 1 läßt sich sogleich von kommutativen regulären Halbgruppen auf die allgemeinsten Halbgruppen ausdehnen, die in Linksquotientengruppen (algebraisch) einbettbar sind, nämlich auf die sog. „ORE-schen Halbgruppen" (vgl. § 2, Bemerkung 1).

Satz 2. *Jede* ORE*sche topologische Halbgruppe* $\mathfrak{H}$ *mit einer invarianten Metrik* $|a, b|$ *läßt sich in die Linksquotientengruppe* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ *derart einbetten, daß* $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H})$ *eine topologische Gruppe mit invarianter Metrik wird, wobei diese Metrik* $|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b|$ *die invariante Fortsetzung der Metrik von* $\mathfrak{H}$ *ist und mit dieser zusammenhängt gemäß*

$$|\alpha^{-1}a, \beta^{-1}b| = |\beta' a, \alpha' b|, \quad \text{wobei} \quad \beta'\alpha = \alpha'\beta$$

und $\alpha, \alpha', \beta, \beta', a, b \in \mathfrak{H}$.

Beweis. Der Beweis des Satzes 1 läßt sich fast wörtlich übertragen.

Satz 3. $\mathfrak{m}$ *sei eine Halbgruppe von der in § 2, Folgerung 2 genau beschriebenen Art. Weiterhin sei* $\mathfrak{m}$ *eine topologische Halbgruppe mit einer invarianten Metrik* $|\alpha, \beta|$. *Unter Benutzung der in § 2, Folgerung 2 verwendeten Bezeichnungen gilt: Wenn die Metrik* $|\alpha, \beta|$ *sich auf* $\mathfrak{H}$ *so fortsetzen läßt, daß diese Fortsetzung bezüglich* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ *invariant ist, so kann man die metrische Halbgruppe* $\mathfrak{m}$ *in* $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ *derart einbetten, daß* $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ *eine topologische Gruppe mit invarianter Metrik* $|A, B|$ *wird, wobei* $|A, B|$ *invariante Fortsetzung von* $|\alpha, \beta|$ *ist.*

Beweis. Läßt sich die Metrik $|\alpha, \beta|$ von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{H}$ so fortsetzen, daß diese Fortsetzung $|a, b|$ bezüglich $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant ist, so sind die in § 4, Satz 2 aufgeführten (notwendigen und) hinreichenden Bedingungen für die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzbarkeit von $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ erfüllt; die Elemente $x^{\times}, y^{\times} \in \mathfrak{H}$ mit $x^{\times}\alpha, \beta y^{\times} \in \mathfrak{m}$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ sind nämlich spezielle Elemente von $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$, da sich $x^{\times}, y^{\times}$ auch in der Form

$$x^{\times} = \mu\alpha^{-1}, \quad y^{\times} = \beta^{-1}\nu \qquad \mu, \nu \text{ geeignet } \in \mathfrak{m}$$

schreiben lassen. Aus § 4, Folgerung 4 erkennt man, daß die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzung von $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ sogar bezüglich $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant ist. Durch diesen Fortsetzungsprozeß wird insbesondere die invariante Metrik $|\alpha, \beta|$ von der Halbgruppe $\mathfrak{m}$ auf die Gruppe $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant fortgesetzt. Wegen Hilfssatz 2 wird $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ dadurch zu einer topologischen Gruppe; in diese ist die metrische Halbgruppe $\mathfrak{m}$ eingebettet.

Satz 4. $\mathfrak{H}$ *sei eine Halbgruppe, die in eine Linksquotientenhalbgruppe* $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ *einbettbar ist (vgl. § 1, Definition, § 2, Satz 1). Ferner trage* $\mathfrak{H}$ *eine bezüglich* $\mathfrak{m}$ *invariante Metrik* $|a, b|$ $(a, b \in \mathfrak{H})$ *mit*

$$|ca, cb| \leq K|a, b|, \quad |ac, bc| \leq K|a, b|$$

(a, b, c beliebig $\in \mathfrak{H}$, K eine reelle Konstante $\geqq 1$). Ist diese Metrik sogar bezüglich $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ (vgl. § 2, Satz 2) invariant, so läßt sie sich bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ so fortsetzen, daß

a) $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$ zu einer metrischen Halbgruppe wird, in die die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$[14]) eingebettet ist;

b) durch den Fortsetzungsprozeß auch die metrische Halbgruppe $\mathfrak{m}$ in die topologische Gruppe mit invarianter Metrik $\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ eingebettet wird ($\mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ wird so Unterhalbgruppe der metrischen Halbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$);

c) für die Fortsetzung von $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$

$$|CA, CB| \leqq K|A, B|, \quad |AC, BC| \leqq K|A, B|$$

gilt, wenn A, B, C beliebig $\in \mathfrak{Q}_l$ und K die obige Konstante sind.

Beweis. Wie bereits im Beweis des Satzes 3 festgestellt, sind unter den Voraussetzungen des Satzes 4 die (notwendigen und) hinreichenden Bedingungen für die bezüglich $\mathfrak{m}$ invariante Fortsetzbarkeit der Metrik $|a, b|$ auf $\mathfrak{Q}_l$ erfüllt (vgl. auch § 4, Satz 2). b) folgt aus Satz 3, c) aus § 4, Satz 3 und schließlich a) aus dem bereits Bewiesenen und aus Hilfssatz 2.

Bemerkung 2. Ist in Satz 4 $\mathfrak{m}$ eine ORESche Halbgruppe (vgl. § 2, Bemerkung 1), so braucht man nicht zu fordern, daß $|a, b|$ bezüglich $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{Q}_l^*(\mathfrak{m})$ invariant ist. Vielmehr genügt es zu verlangen, daß $|a, b|$ bezüglich $\mathfrak{m}$ invariant ist. Die Behauptungen a), b) und c) des Satzes 4 gelten auch dann noch, wie ich in meiner Dissertation, § 6, Satz 4, gezeigt habe (vgl. Einleitung, letzter Absatz).

Die Sätze 1 bis 4 dieses Paragraphen geben Teillösungen des in § 4 formulierten Einbettungsproblems. Man erkennt aus diesen Sätzen, daß das einfache Verfahren, eine Metrik einer Halbgruppe invariant auf eine Quotientenhalbgruppe fortzusetzen zu weitreichenden Resultaten führt. In § 6 soll ein anderes Einbettungsverfahren für metrische Halbgruppen besprochen werden, das auf ganz anderen Gedanken beruht und weniger weit reicht.

§ 6. Ein Satz von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT.

Abschließend soll über ein Verfahren von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT zur Einbettung kommutativer Halbgruppen mit invarianter Metrik in Quotientengruppen referiert und dieses Verfahren mit der Methode durch invariante Fortsetzung einer Metrik (vgl. § 5) verglichen werden. Es wurde bereits erwähnt, daß dem von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT in [1] Satz 15 angegebenen Verfahren ganz andere Gedanken zugrunde liegen als der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Einbettungsmethode.

In [1] werden unter anderem kommutative reguläre Halbgruppen $\mathfrak{H}$ mit Einselement $e = \mathbf{1}$ betrachtet. Diese sind einbettbar in ihre sog. „Quotienten-

[14]) Nach Hilfssatz 2 ist $\mathfrak{H}$ eine metrische Halbgruppe.

strukturen" $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$[15]). Setzt man noch voraus, daß eine solche Halbgruppe $\mathfrak{H}$ eine invariante Metrik $d(a,b)$ $(a,b\in\mathfrak{H})$ trägt, so stellt $\mathfrak{H}$ nach § 4, Folgerung 2 eine metrische Halbgruppe dar. Es handelt sich darum, auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ eine invariante Metrik so zu definieren, daß $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ zu einer topologischen Gruppe wird, in die die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ einbettbar ist (vgl. § 5, Definition). Die Methode durch invariante Fortsetzung einer Metrik läßt sich offenbar sofort auf den vorliegenden Fall übertragen. Gelbaum, Kalisch und Olmstedt gehen anders vor: Sie definieren zunächst eine „Norm" $\|\overline{(\alpha,a)}\|$ in $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$:

$$\|\overline{(\alpha,a)}\| = \inf_{(\alpha',a')\,R\,(\alpha,a)} \big(d(\alpha',e)+d(a',e)\big) \qquad \alpha,\alpha',a,a'\in\mathfrak{H},$$

nutzen dabei also die Voraussetzung $e=\mathbf{1}\in\mathfrak{H}$ wesentlich aus[16]). Weiterhin setzen sie

$$D\big(\overline{(\alpha,a)},\overline{(\beta,b)}\big) = \|\overline{(\alpha,a)}\cdot\overline{(\beta,b)}^{-1}\| = \|\overline{(\alpha b,a\beta)}\|.$$

$D\big(\overline{(\alpha,a)},\overline{(\beta,b)}\big)$ erweist sich als invariante Metrik auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$. Läßt sich die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ (Metrik d) in die topologische Gruppe $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ (Metrik D) einbetten? In [1] wird diese Frage nur unter einer Zusatzvoraussetzung bejahend beantwortet: Φ bezeichne die kanonische Abbildung von $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$, d.h. es sei

$$\Phi\big((\alpha,a)\big) = \overline{(\alpha,a)} \qquad \alpha,a\in\mathfrak{H}.$$

Dann heißt die Relation R (vgl. Fußnote 15) *offen*, wenn für jede offene Menge U von $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ die „Saturation" $\Phi^{-1}\Phi(U)$ eine offene Menge in $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ darstellt. Dabei ist $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ als Produktraum topologisiert und Φ^{-1} ist die zu Φ inverse Abbildung.

Dann gilt der folgende Satz, der in anderer Formulierung in [1], Satz 15 enthalten ist.

---

[15]) Die *Quotientenstruktur* $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ einer kommutativen regulären Halbgruppe $\mathfrak{H}$ besteht aus allen Äquivalenzklassen von $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation R

$$(\alpha,a)\,R\,(\beta,b) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \alpha b=\beta a \;\; (\alpha,\beta,a,b\in\mathfrak{H}).$$

Ist $\overline{(\alpha,a)}$ das Symbol für die (R-) Äquivalenzklasse von $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, in der (α,a) liegt, und wird die Multiplikation solcher Äquivalenzklassen definiert durch

$$\overline{(\alpha,a)}\,\overline{(\beta,b)} = \overline{(\alpha\beta,ab)} \qquad \alpha,\beta,a,b\in\mathfrak{H},$$

so wird $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ zu einer Gruppe, die der Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ isomorph ist.

[16]) Nach § 3, Satz 1 kann man bei einer kommutativen Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit einer invarianten Metrik stets voraussetzen, daß $\mathfrak{H}$ ein Einselement enthält. Da diese Voraussetzung bei allgemeineren Halbgruppen eine Einschränkung darstellt (s. § 3, Satz 1), ist es durchaus wünschenswert, ein Einbettungsverfahren zu kennen, das von der Existenz eines Einselements in $\mathfrak{H}$ keinen Gebrauch macht. Ein solches Verfahren ist die Methode durch invariante Fortsetzung einer Metrik.

Satz (GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT [1], Satz 15). *Gegeben sei eine kommutative reguläre Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einselement $e=\mathbf{1}$ und mit einer invarianten Metrik $d(a, b)$. Unter Benutzung der obigen Bezeichnungen gilt dann:*

a) Durch

$$D\left(\overline{(\alpha, a)}, \overline{(\beta, b)}\right) = \|\overline{(\alpha, a)} \cdot \overline{(\beta, b)}^{-1}\| = \|\overline{(\alpha b, a \beta)}\|$$

läßt sich auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ eine invariante Metrik D einführen, so daß $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ zu einer topologischen Gruppe wird.

b) $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ (mit der Metrik D) ist genau dann diskret, wenn $\mathfrak{H}$ (mit der Metrik d) diskret ist.

c) Ist R offen, so kann die metrische Halbgruppe $\mathfrak{H}$ (Metrik d) eingebettet werden in eine topologische Gruppe mit invarianter Metrik[17]).

Ein entsprechender Satz kann statt für $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ für die zu $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ isomorphe Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ ausgesagt werden, wenn man in dieser

$$\left\|\frac{a}{\alpha}\right\| = \inf_{(\alpha', a') R (\alpha, a)} \left(d(\alpha', e) + d(a', e)\right) \qquad \alpha, \alpha', a, a' \in \mathfrak{H},$$

$$D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right) = \left\|\left(\frac{a}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{b}{\beta}\right)^{-1}\right\| = \left\|\frac{a\beta}{\alpha b}\right\|$$

setzt. Insbesondere bleibt der Wortlaut der Behauptung c) erhalten, wenn man [17]) durch [18]) ersetzt.

Teil a) des obigen Satzes ist als Hilfssatz zum Beweis der Behauptung c) anzusehen, da man ja auf einfachere Weise eine invariante Metrik D_0 auf $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ [bzw. auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$] einführen kann als durch die Definition der Metrik D; man setze etwa

$$D_0(A, B) = 1 \quad \text{für} \quad A \neq B \qquad A, B \in (\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R \ (\text{bzw. } \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{H})),$$
$$D_0(A, A) = 0 \qquad\qquad A \in (\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R \ (\text{bzw. } \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{H})).$$

b) bezieht sich auf eine Eigenschaft der speziellen Metrik D; darauf wird noch zurückzukommen sein. c) ist die eigentliche Aussage des Satzes. Da c) aus § 5, Satz 1 entnommen werden kann, ist der obige Satz von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT im wesentlichen auch mittels der Methode durch invariante Fortsetzung einer Metrik ableitbar.

Es wäre denkbar, daß das in [1], Satz 15 entwickelte Metrisierungsverfahren — bei Anwendung auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ statt $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ — für kommutative reguläre Halbgruppen $\mathfrak{H}$ mit Einselement, einer invarianten Metrik und offener Relation R zu derselben Topologisierung von $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ führt wie die in §§ 4 bis 5 dargestellte Methode durch invariante Fortsetzung (die bekanntlich auf wesentlich umfassendere Klassen von Halbgruppen anwendbar ist). Speziell könnte sich die Metrik $D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)$ als die invariante Fortsetzung der Metrik $d(a, b)$ von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ erweisen. Daß dem nicht so ist, lehrt ein einfaches

[17]) $\mathfrak{H}$ (Metrik d) ist einbettbar in $(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H})/R$ $\left(\text{Metrik } D\left(\overline{(\alpha, a)}, \overline{(\beta, b)}\right)\right)$.

[18]) $\mathfrak{H}$ (Metrik d) ist eingebettet in $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ $\left(\text{Metrik } D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)\right)$.

Beispiel. Die multiplikative Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ der natürlichen Zahlen mit der invarianten Metrik

$$d(a, b) = |\log a - \log b| \qquad a, b \in \mathfrak{Z}$$

ist eine diskrete metrische Halbgruppe (vgl. § 3, Beispiel). Wird die Metrik d auf die Quotientengruppe von $\mathfrak{Z}$, die multiplikative Gruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ der positiven rationalen Zahlen, invariant fortgesetzt, so erhält man nach § 5, Satz 1 auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ die Metrik

$$D'\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right) = |\log a\beta - \log b\alpha| = \left|\log \frac{a}{\alpha} - \log \frac{b}{\beta}\right|$$

$(\alpha, \beta, a, b \in \mathfrak{Z})$, und $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ wird so zu einer nichtdiskreten topologischen Gruppe mit invarianter Metrik (vgl. § 3, Beispiel). In diese topologische Gruppe ist die metrische Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ eingebettet, wie aus § 5, Satz 1 folgt.

Das Verfahren von Gelbaum, Kalisch und Olmstedt führt ebenfalls zu einer Einbettung der metrischen Halbgruppe $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ (wenn es wie oben beschrieben auf Quotientengruppen statt Quotientenstrukturen angewandt wird). Mittels eines Kriteriums[19]) aus [1] bestätigt man nämlich leicht, daß für $\mathfrak{H} = \mathfrak{Z}$ und $d(a, b) = |\log a - \log b|$ $(a, b \in \mathfrak{Z})$ die Relation R offen ist. Daher kann Teil c) des obigen Satzes benutzt werden. Ferner muß nach Teil b) des Satzes von Gelbaum, Kalisch und Olmstedt die Quotientengruppe von $\mathfrak{Z}$ durch das Verfahren aus [1] diskret topologisiert werden.

Die Metriken $D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)$ und $D'\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)$ führen also hier zu inäquivalenten Topologisierungen der Quotientengruppe $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$. Daher kann die Metrik $D\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right)$ nicht die invariante Fortsetzung der Metrik $d(a, b)$ auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{H})$ sein. Außerdem folgt: Das in § 4 formulierte Einbettungsproblem für metrische Halbgruppen kann mehrere Lösungen haben.

Daß die Metrik D nicht die invariante Fortsetzung der Metrik d von $\mathfrak{Z}$ auf $\mathfrak{Q}(\mathfrak{Z})$ sein kann, läßt sich auch direkt einsehen. Berechnet man nämlich für beliebige Elemente $a, b \in \mathfrak{Z}$ ihre Entfernung im Sinne der Metrik D und vergleicht diese mit der Entfernung $d(a, b)$, so ergibt sich zunächst

$$D(a, b) = \log \frac{[a, b]}{(a, b)}\ ^{20}).$$

Demnach ist genau dann

$$d(a, b) = D(a, b) \qquad a, b \in \mathfrak{Z},$$

---

[19]) Das erwähnte Kriterium ist ein Teil des Satzes 3 aus [1]. Es besagt: Die Relation R ist genau dann offen, wenn zu beliebigen $a, b, c \in \mathfrak{H}$ (kommutative reguläre Halbgruppe mit Einselement) und zu beliebigen (offenen) Umgebungen U_a, U_b der Punkte a, b stets (offene) Umgebungen U_{ac}, U_{bc} von ac, bc derart existieren, daß jeder Punkt aus $U_{ac} \times U_{bc}$ (R-) äquivalent ist einem gewissen Punkt aus $U_a \times U_b$.

[20]) Für natürliche Zahlen a, b bedeutet (a, b) den größten gemeinschaftlichen Teiler, $[a, b]$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

wenn $a|b$ oder $b|a$ ist[21]); in allen anderen Fällen liefert D größere Entfernungen als d. Insbesondere gilt für jede natürliche Zahl n

$$d(10^n + 1, 10^n) = \log(1 + 10^{-n}) < 10^{-n},$$
$$D(10^n + 1, 10^n) = \log(10^{2n} + 10^n) > 2n \cdot \log(10).$$

Aus diesen Ungleichungen kann man eine interessante Folgerung ziehen, aus der man erkennt, daß die beiden Metrisierungsverfahren, das von GELBAUM, KALISCH und OLMSTEDT und das in §§ 4 bis 5 entwickelte, von ganz verschiedener Natur sein müssen:

Im vorliegenden Beispiel kann man zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ und zu beliebig großem $N > 0$ stets Elemente a_0, b_0 aus $\mathfrak{Z}$ finden mit

$$d(a_0, b_0) < \varepsilon \quad \text{und} \quad D(a_0, b_0) > N.$$

Bemerkung. Die Bezeichnungen in § 6 sind so gewählt, daß sie weitgehend mit den in den vorhergehenden Paragraphen sowie den in meiner Dissertation verwendeten übereinstimmen. Daher treten eine Reihe von (kleineren) Abweichungen gegenüber [1] auf.

Literatur.

[1] GELBAUM, B., G. K. KALISCH and J. M. H. OLMSTEDT: On the embedding of topological semigroups and integral domains. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 807—821 (1951). — [2] HILLE, E.: Functional Analysis and Semi-Groups. New York 1948. — [3] MURATA, K.: On the quotient semi-group of a non commutative semi-group. Osaka Math. J. **2**, 1—5 (1950). — [4] ORE, O.: Linear equations in non-commutative fields. Ann. of Math. (2) **32**, 463—477 (1931). — [5] PONTRJAGIN, L.: Topological Groups. Princeton 1946. — [6] VANDIVER, H. S.: On the embedding of one semigroup in another, with applications to semirings. Amer. J. Math. **62**, 72—78 (1940).

[21]) $a|b$ besagt wie üblich, daß a ein Teiler von b ist.

München, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. April 1955.)

ELTERMANN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 469—501 (1955)

Fehlerabschätzung bei näherungsweiser Lösung von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von
HEINZ ELTERMANN.

Einleitung. Das Problem der Fehlerabschätzung bei näherungsweiser Lösung eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

besteht im allgemeinen in der folgenden Fragestellung:

Gegeben ist ein in einem Intervall $x_0 \leqq x < x_1$ definiertes System von Funktionen $y_i = Y_i(x)$, welches man als *Näherungslösung* bezeichnet. Für eine noch unbekannte *Lösung* $y_i = y_i(x)$ (System für $i = 1, 2, \ldots, n$) ist in demselben Intervall eine Abschätzung des *Fehlers* $z_i = z_i(x) = y_i(x) - Y_i(x)$ in der Form

$$\mathfrak{p}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \leqq g(x) \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x < x_1 \tag{2}$$

gesucht, wobei $\mathfrak{p}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eine stetige positive Funktion der *Fehlerkomponenten* z_i ist, welche nur dann verschwindet, wenn alle $z_i = 0$ sind.

Praktisch wird man hierbei so vorgehen, daß man die Funktion $\mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_n)$ vorgibt — etwa

$$\mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_n) = \sqrt{\sum z_i^2} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_n) = \operatorname{Max}(|z_i|), \tag{3}$$

um nur zwei Beispiele anzugeben —, während man die Funktion $g(x)$ zu bestimmen sucht.

Diesem Zweck dient die in dieser Arbeit beschriebene *Methode der einschließenden Röhrenbereiche*. — Eine Anregung zu den auf diese Methode führenden Gedankengängen gaben die von Herrn PERRON [8] eingeführten *Oberfunktionen* und *Unterfunktionen* einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung.

Nach PERRON hat eine Oberfunktion $y = \bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ stets die Eigenschaft, an jeder Stelle $(x; \bar{y}(x))$ einen größeren Anstieg zu haben als jede diesen Punkt passierende Lösung. Hieraus kann gefolgert werden, daß für jede Lösung $y = y(x)$, welche für $x = x_0$ der Ungleichung $y(x_0) \leqq \bar{y}(x_0)$ genügt, dieselbe Ungleichung in der Form $y(x) \leqq \bar{y}(x)$ für $x > x_0$ erhalten bleibt, soweit die Oberfunktion definiert ist.

Entsprechend hat eine Unterfunktion $y = \underline{y}(x)$ die Eigenschaft, daß sie an jeder Stelle $(x; \underline{y}(x))$ einen kleineren Anstieg hat als jede diesen Punkt passierende Lösung. Hieraus kann entsprechend gefolgert werden, daß für

jede Lösung $y = y(x)$, welche für $x = x_0$ der Ungleichung $y(x_0) \geqq \underline{y}(x_0)$ genügt, dieselbe Ungleichung in der Form $y(x) \geqq \underline{y}(x)$ für $x > x_0$ erhalten bleibt, soweit die Unterfunktion definiert ist.

Wenn nun in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$ sowohl eine Oberfunktion $\bar{y}(x)$ als auch eine Unterfunktion $\underline{y}(x)$ zur Verfügung stehen, wobei noch die Bedingung $\underline{y}(a) \leqq \bar{y}(a)$ erfüllt sein muß, woraus $\underline{y}(x) \leqq \bar{y}(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ folgt, so bildet der durch die Ungleichungen

$$a \leqq x \leqq b \quad \text{und} \quad \underline{y}(x) \leqq y \leqq \bar{y}(x) \tag{4}$$

definierte abgeschlossene Bereich der $(x; y)$-Ebene einen einschließenden Röhrenbereich der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$. Er hat die Eigenschaft, daß er, wenn $y = y(x)$ eine Lösung ist, alle Punkte $(x; y)$ mit $y = y(x)$ und $a < x \leqq b$ einschließt, sofern er nur den Anfangspunkt $(a; y(a))$ einschließt.

Macht man nun den Ansatz

$$\bar{y}(x) = Y(x) + g(x) \quad \text{bzw.} \quad \underline{y}(x) = Y(x) - g(x), \tag{5}$$

wobei $Y(x)$ eine Näherungslösung ist, und bestimmt $g(x)$ entsprechend, so gewinnt man die Abschätzung $\mathfrak{p}(z) \leqq g(x)$ mit $\mathfrak{p}(z) = |z|$.

Dies ist der Grundgedanke, von dem man durch gewisse Verallgemeinerungen auf *Systeme* von Differentialgleichungen zur Methode der einschließenden Röhrenbereiche geführt wird.

Im Ergebnis kommt es etwa darauf hinaus, daß man die Funktion $g(x)$ so zu bestimmen hat, daß sie einer Differential-Ungleichung

$$g'_+ \geqq L(x; g) + q(x) \quad (g'_+ \text{ ist die rechtsseitige Ableitung}) \tag{6}$$

genügt. Hierbei bedeutet $q(x)$ im wesentlichen eine Schranke für die *Richtungsfehler*

$$r_i(x) = f_i\big(x; Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)\big) - Y_i'(x), \tag{7}$$

während $L(x; g)$ den Charakter einer LIPSCHITZ-*Schranke* hat. Für den Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ hat sie der LIPSCHITZ-*Bedingung*

$$\operatorname{sign}(y - Y) \cdot \big(f(x; y) - f(x; Y)\big) \leqq L(x; |y - Y|) \tag{8}$$

zu genügen. Diese LIPSCHITZ-Bedingung ist milder als die gewöhnlich verwendete

$$|f(x; y) - f(x; Y)| \leqq M(x; |y - Y|); \tag{9}$$

denn wenn man eine LIPSCHITZ-Schranke M für (9) gefunden hat, so hat man gleichzeitig eine LIPSCHITZ-Schranke L für (8) gefunden, weil diese Bedingung mit $L = M$ sicher erfüllt ist. Hingegen kann man aber unter Umständen noch eine kleinere Schranke L finden. Bei Systemen von Differentialgleichungen liegen die Verhältnisse ganz entsprechend. Auch hier kommt man auf mildere LIPSCHITZ-Bedingungen als man gewöhnlich ansetzt. Dieser Umstand ist deshalb bemerkenswert, weil jede Verkleinerung der LIPSCHITZ-

Schranke — die nicht notwendig eine Verkleinerung dem Betrage nach sein muß — eine Verschärfung der Fehlerabschätzung bedeutet, was bei Betrachtung von (6) unmittelbar zu erkennen ist.

In der Literatur fehlt es zwar nicht an Beispielen für die Verwendung von derartig gemilderten LIPSCHITZ-Bedingungen zur Herstellung gewisser Abschätzungen und zur Herleitung von Eindeutigkeitskriterien (s. z. B. SANSONE [*10*], GIULIANO [*2*] und MCSHANE [*4*]), doch hat man auf dem Gebiete der praktischen Fehlerabschätzungen bisher wenig Gebrauch davon gemacht. Einen Hinweis auf die Verwendbarkeit milderer LIPSCHITZ-Bedingungen findet man bei COLLATZ [*1*].

§ 1. Grundlegende Sätze und Definitionen.

1. Das Differentialgleichungssystem. Ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung kann in der skalaren Form

$$(S) \qquad y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

oder auch in kürzerer Form als Vektor-Differentialgleichung

$$(V) \qquad \mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$$

geschrieben werden. Hierbei hat der Vektor

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

als orthogonale Komponenten — d. h. Bestimmungszahlen (Koordinaten) bezüglich einer normierten Orthogonalbasis — die n abhängigen Variablen y_i, während die Vektor-Funktion

$$(2) \qquad \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) = \big(f_1(x; \mathfrak{y}), f_2(x; \mathfrak{y}), \ldots, f_n(x; \mathfrak{y})\big)$$

als entsprechende orthogonale Komponenten die n rechten Seiten

$$(3) \qquad f_i(x; \mathfrak{y}) = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

hat.

2. Lösungen und Integralkurven. Ein System von n Funktionen

$$(1) \qquad \big(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\big) = \mathfrak{y}(x),$$

welches das Differentialgleichungssystem (S) bzw. die Differentialgleichung (V) befriedigt, heißt eine *Lösung*.

Es liegt nahe, jeder Lösung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$, welche durch eine n-dimensionale Vektorfunktion des skalaren Parameters x dargestellt wird, eine in den $(n+1)$-dimensionalen Raum mit dem Ortsvektor

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y}) = (x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

eingebettete *Integralkurve* $\mathfrak{x} = \big(x; \mathfrak{y}(x)\big)$ zuzuordnen. (Hierbei soll die x-Richtung zu allen y-Richtungen orthogonal sein.) Diese wiederum kann auf verschiedene Weisen durch eine Parameterdarstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ mit einem monoton

und stetig *wachsenden* Parameter t beschrieben werden. Zwei spezielle Darstellungen sollen besonders ins Auge gefaßt werden:

$$(3a) \qquad \mathfrak{x} = (a+t; \mathfrak{y}(a+t)) \qquad \text{bzw.} \qquad (3b) \quad \mathfrak{x} = (b-t; \mathfrak{y}(b-t)),$$

wobei t in beiden Fällen das Intervall $0 \leqq t \leqq (b-a)$ durchläuft und $\mathfrak{y}(x)$ eine in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ erklärte Lösung ist. Für den *Tangentenvektor* der Integralkurve erhält man, je nachdem welche Parameterdarstellung zugrunde gelegt wird,

$$(4a) \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{R}(\mathfrak{x}) \qquad \text{bzw.} \qquad (4b) \quad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = -\mathfrak{R}(\mathfrak{x}),$$

wobei das $(n+1)$-dimensionale Vektorfeld

$$(5) \qquad \mathfrak{R}(\mathfrak{x}) = (1; \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}))$$

durch die rechte Seite $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ der Differentialgleichung (V) für jeden Punkt $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y})$ definiert ist, für den diese rechte Seite erklärt ist. Wir machen die

Voraussetzung: Die Vektorfunktion $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ ist für alle Punkte $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y})$ in einem gewissen offenen Gebiet G des $\mathfrak{x}$-Raumes definiert und stetig. Dann ist also $\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ ein in G definiertes und dort stetiges Vektorfeld.

Dieses Vektorfeld ordnet jedem Punkt $\mathfrak{x}$ aus G einen Vektor $\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ zu, der als Tangentenvektor einer jeden diesen Punkt passierenden oder von ihm ausgehenden nach wachsenden Werten von x orientierten Integralkurve in diesem Punkte gelten kann. Orientiert man jede solche Integralkurve aber nach fallenden Werten von x, so übernimmt das Feld $-\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ diese Rolle.

Definition. Das durch $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}) = (1; \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}))$ erklärte $(n+1)$-dimensionale Vektorfeld soll das *orientierte Richtungsfeld* der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ heißen.

3. Existenz und Fortsetzbarkeit der Integralkurven. Über die Existenz von Lösungen gibt der folgende Satz Auskunft. (Nach einem Satz von PEANO [7], vgl. auch KAMKE [3], S. 59—66; 126—130.)

Satz 1. *Ist $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ in einem offenen Gebiet G des $(x; \mathfrak{y})$-Raumes stetig, und ist $\mathfrak{x}_0 = (x_0; \mathfrak{y}_0)$ ein Punkt aus G, so gibt es ein Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ und in diesem Intervall mindestens eine stetig differenzierbare Lösung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$, für die $\mathfrak{y}(x_0) = \mathfrak{y}_0$ ist.*

Nach einem weiteren Satz, den man z. B. bei KAMKE [3] S. 75—77; 135—136 nachlesen kann, läßt sich jede Lösung nach Satz 1 noch über x_1 hinaus fortsetzen, wobei als Fortsetzung dieser Lösung jede Lösung $\mathfrak{y}_1(x)$ gilt, die in einem Intervall $x_0 \leqq x < x_2$ mit $x_2 > x_1$ definiert ist und im Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$ mit $\mathfrak{y}(x)$ übereinstimmt. Für solche Fortsetzungen gilt der ebenfalls a. a. O. KAMKE [3] in etwas anderer Formulierung stehende

Satz 2. *Ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ eine für $x_0 \leqq x \leqq x_1$ definierte Lösung der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$, deren Integralkurve ganz in G liegt, so gibt es mindestens ein rechts offenes Intervall $x_0 \leqq x < b$ mit $b > x_1$ und in diesem mindestens eine Fortsetzung $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}^*(x)$, deren Integralkurve mehr Punkte mit G gemeinsam hat*

als mit jeder abgeschlossenen Teilmenge A von G. Die Integralkurve einer jeden solchen Fortsetzung soll eine vollständige rechts-orientierte Integralkurve der Differentialgleichung mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{x}_0 = (x_0; \mathfrak{y}_0)$ heißen.

Durch Kombination der ersten beiden Sätze erhält man sofort den

Satz 3. *Ist $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ in dem offenen Gebiet G stetig, und ist A ein abgeschlossener Teilbereich aus G, so geht von jedem Punkt $\mathfrak{x}_0 = (x_0; \mathfrak{y}_0)$ aus A mindestens eine vollständige rechts-orientierte Integralkurve aus, und jede von diesem Punkt ausgehende vollständige rechts-orientierte Integralkurve enthält einen Randpunkt $\mathfrak{x}_1 = (x_1; \mathfrak{y}_1)$ von A mit $x_0 \leqq x_1$ (der möglicherweise auch mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{x}_0$ zusammenfallen kann), derart daß diese Integralkurve für $x > x_1$ keinen Punkt von A mehr enthält.*

§ 2. Die Eintritts- und Austrittskriterien für Integralkurven.

1. Innen-, Außen- und Randpunkte. Wir betrachten einen abgeschlossenen Teilbereich A des offenen Gebietes G. Alle Punkte der offenen Punktmenge $(G - A)$ sollen *Außenpunkte* heißen. Alle Punkte von A, die in A eine $(n+1)$-dimensionale Umgebung ($(n+1)$-dimensionale Kugel) besitzen, sollen *Innenpunkte* heißen. Alle anderen Punkte von A sollen *Randpunkte* heißen. Die Menge der Innenpunkte ist ebenso wie die Menge der Außenpunkte offen. Die Menge der Randpunkte ist abgeschlossen. Jeder Häufungspunkt von Randpunkten ist also selbst ein Randpunkt.

Wir ordnen nun allen Punkten $\mathfrak{x}$ aus G eine stetige Funktion $u(\mathfrak{x})$ zu, die für Innenpunkte positiv, für Außenpunkte negativ und für Randpunkte gleich Null ist. Dies geschieht folgendermaßen:

Definition. Für den Fall, daß $\mathfrak{x}$ ein Innenpunkt ist, setze man $u(\mathfrak{x})$ gleich der oberen Grenze der Radien aller Umgebungen, die nur aus Innenpunkten bestehen. Für den Fall, daß $\mathfrak{x}$ ein Außenpunkt ist, setze man $u(\mathfrak{x})$ gleich dem Negativen der oberen Grenze der Radien aller Umgebungen, die nur aus Außenpunkten bestehen. Für einen Randpunkt $\mathfrak{x}$ setze man $u(\mathfrak{x})$ gleich Null. — Es gilt der

Satz 4. *Die Funktion $u(\mathfrak{x})$ erfüllt die* Lipschitz*-Bedingung*

$$|u(\mathfrak{x}_1) - u(\mathfrak{x}_2)| \leqq |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|, \tag{1}$$

wenn $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ irgendwelche Punkte aus G sind.

Beweis. Wir betrachten die beiden durch die Ungleichungen

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1| \leqq |u(\mathfrak{x}_1)| \quad \text{bzw.} \quad |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2| \leqq |u(\mathfrak{x}_2)| \tag{2}$$

definierten Kugeln, die so beschaffen sind, daß sie im Inneren entweder nur Innenpunkte oder nur Außenpunkte enthalten, während auf ihrem Rande jeweils mindestens ein Punkt liegt, der entweder ein Randpunkt von A ist oder nicht mehr zu G gehört. Deshalb kann es nicht vorkommen, daß eine der Kugeln ganz im Inneren der anderen liegt. Sind also $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ beide Innenpunkte oder beide Außenpunkte, so gelten die Abschätzungen

$$|u(\mathfrak{x}_1)| \leqq |u(\mathfrak{x}_2)| + |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|; \quad |u(\mathfrak{x}_2)| \leqq |u(\mathfrak{x}_1)| + |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|, \tag{3}$$

aus denen sofort (1) folgt. Ist aber $\mathfrak{x}_1$ Innen- oder Randpunkt und $\mathfrak{x}_2$ Außen- oder Randpunkt, so haben die Kugeln (2) höchstens einen Randpunkt gemeinsam, und es folgt

$$|u(\mathfrak{x}_1)| + |u(\mathfrak{x}_2)| \leq |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2| \quad \text{also erst recht (1).} \tag{4}$$

2. Eintritts-, Austritts- und Gleitrichtungen. $\mathfrak{x}_0$ sei irgendein Randpunkt von A. $\mathfrak{n}$ sei ein $(n+1)$-dimensionaler Einheitsvektor. Dann wird durch die Parameterdarstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n}$ für $t \geqq 0$ eine Halbgerade definiert. Bei festem $\mathfrak{x}_0$ und festem $\mathfrak{n}$ ist die Funktion

$$q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}, t) = \frac{1}{t} \cdot \big(u(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}_0)\big) = \frac{1}{t} \cdot \big(u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n}) - u(\mathfrak{x}_0)\big) \tag{1}$$

eine für $t > 0$ stetige Funktion von t, soweit $\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n}$ in G liegt. Wir *definieren* eine Funktion von $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{n}$:

$$Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) = \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}, t), & \text{wenn dieser Grenzwert positiv} \\ \overline{\lim\limits_{t \to 0}}\, q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}, t), & \text{wenn dieser Grenzwert negativ} \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases} \tag{2}$$

Daß die benötigten Grenzwerte stets existieren, folgt aus Satz 4. Darüber hinaus gilt sogar der

Satz 5. *Die nach* (2) *definierte Funktion* $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n})$ *ist dem Betrage nach niemals größer als Eins.*

Mit Hilfe der Funktion $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n})$ teilen wir die Richtungen der von einem festen Randpunkt $\mathfrak{x}_0$ ausgehenden Halbgeraden in verschiedene Klassen ein.

Definition. Die Richtung von $\mathfrak{n}$ soll

wenn $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) > 0$ ist, *Eintrittsrichtung*,
wenn $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) < 0$ ist, *Austrittsrichtung* und
wenn $Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) = 0$ ist, *Gleitrichtung* heißen.

Ferner sollen die folgenden Bezeichnungen verwendet werden:

Menge aller Eintrittsrichtungen = *Innenkegel* von $\mathfrak{x}_0$
Menge aller Austrittsrichtungen = *Außenkegel* von $\mathfrak{x}_0$
Menge aller Gleitrichtungen = *Gleitkegel* von $\mathfrak{x}_0$.

Es gilt nun der folgende

Satz 6. *Ist* $\mathfrak{x}_0$ *ein Randpunkt von* A, *und gehört die Richtung des Einheitsvektors* $\mathfrak{n}$ *dem Innenkegel (Außenkegel) von* $\mathfrak{x}_0$ *an, so gibt es zu jeder positiven Zahl* $c < |Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n})|$ *eine positive Zahl* ϱ, *derart daß für alle Einheitsvektoren* $\mathfrak{m}$, *die der Ungleichung* $|\mathfrak{m} - \mathfrak{n}| \leq c$ *genügen, und alle Werte von* t *aus dem Intervall* $0 < t \leq \varrho$ *die Punkte* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{m}$ *Innenpunkte (Außenpunkte) sind.*

Beweis. Auf Grund der Definitionen (2) gilt in beiden Fällen

$$|Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n})| = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot |u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n})| \qquad \big(u(\mathfrak{x}_0) = 0\big). \tag{3}$$

Dann gibt es aber auf Grund der gemachten Voraussetzung: $c<|Q|$ eine Zahl $\varrho>0$, so daß für $0<t\leq\varrho$ $|u(\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{n})|>c\cdot t$ ist. Verbindet man dies mit der über den Vektor $\mathfrak{m}$ gemachten Voraussetzung, so erhält man mit $\mathfrak{x}_1=\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{x}_2=\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{m}$ die Abschätzung

$$|\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1|=t\cdot|\mathfrak{m}-\mathfrak{n}|\leq c\cdot t<|u(\mathfrak{x}_1)|. \tag{4}$$

Das bedeutet aber, daß der Punkt $\mathfrak{x}_2=\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{m}$ Innenpunkt (Außenpunkt) ist.

3. Ein Beispiel. Es gilt ein für die praktische Berechnung der Funktion $Q(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{n})$ wichtiger

Satz 7. *Definiert man den abgeschlossenen Teilbereich A von G durch die Ungleichung: $U(\mathfrak{x})\geq 0$, wobei $U(\mathfrak{x})$ eine stetig differenzierbare Funktion von $\mathfrak{x}$ ist, deren Gradient für den durch die Gleichung: $U(\mathfrak{x}_0)=0$ definierten Randpunkt $\mathfrak{x}_0$ nicht verschwindet, so berechnet man $Q(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{n})$ nach der Gleichung*

$$Q(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{n})=\frac{1}{\mathfrak{N}}\cdot(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N}) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{N}=\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}_0). \tag{1}$$

Der Vektor $\mathfrak{n}$ hat also je nach dem Vorzeichen von $(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N})$

$$\begin{cases} \textit{Eintrittsrichtung für } (\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N})>0 \\ \textit{Austrittsrichtung für } (\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N})<0 \\ \textit{Gleitrichtung für } (\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{N})=0. \end{cases} \tag{2}$$

Beweis. Zunächst ist klar, daß die Funktion $u(\mathfrak{x})$ definitionsgemäß stets dasselbe Vorzeichen hat wie die Funktion $U(\mathfrak{x})$. Auf der Halbgeraden: $\mathfrak{x}(t)=\mathfrak{x}_0+t\cdot\mathfrak{n}$ strebt wegen der vorausgesetzten Stetigkeit des Gradienten grad $U(\mathfrak{x}(t))$ mit gegen Null fallenden Werten von t gegen grad $U(\mathfrak{x}_0)$. Ferner gibt es zu jedem hinreichend kleinen Wert von t einen Randpunkt $\mathfrak{x}_r(t)$, derart daß

$$|\mathfrak{x}(t)-\mathfrak{x}_r(t)|=|u(\mathfrak{x}(t))| \tag{3}$$

ist. Da die rechte Seite von (3) für $t\to 0$ gegen Null strebt, so strebt auch $\mathfrak{x}_r(t)$ gegen $\mathfrak{x}_0$. Die Funktion $u(\mathfrak{x}(t))$ läßt sich durch Lösen der Extremumsaufgabe

$$|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}(t)|=\text{Minimum für } U(\mathfrak{x})=0 \text{ bei festem } t \tag{4}$$

gewinnen, wobei gleichzeitig ein $\mathfrak{x}_r(t)$ gewonnen wird. Die LAGRANGEsche Methode liefert die Gleichung

$$\mathfrak{x}(t)-\mathfrak{x}_r(t)=\lambda\cdot\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}_r(t)), \tag{5}$$

wobei λ das Vorzeichen von $U(\mathfrak{x}(t))$ bzw. von $u(\mathfrak{x}(t))$ hat. Auf Grund von (3) läßt sich λ berechnen, und wir erhalten genauer

$$\mathfrak{x}(t)-\mathfrak{x}_r(t)=u(\mathfrak{x}(t))\cdot\frac{\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}_r(t))}{|\operatorname{grad}U(\mathfrak{x}_r(t))|}. \tag{6}$$

Nun erschließt man mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Gleichung

$$(7) \qquad U(\mathfrak{x}(t)) = U(\mathfrak{x}(t)) - U(\mathfrak{x}_r(t)) = (\mathfrak{x}(t) - \mathfrak{x}_r(t)) \cdot \operatorname{grad} U(\tilde{\mathfrak{x}}(t)),$$

wobei $\tilde{\mathfrak{x}}(t)$ auf der Strecke zwischen $\mathfrak{x}(t)$ und $\mathfrak{x}_r(t)$ liegt. Diese Gleichung geht mit Hilfe von (6) über in die Gleichung

$$(8) \qquad U(\mathfrak{x}(t)) = u(\mathfrak{x}(t)) \cdot |\operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_r(t))| \cdot \frac{\operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_r(t)) \cdot \operatorname{grad} U(\tilde{\mathfrak{x}}(t))}{\operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_r(t)) \cdot \operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_r(t))}.$$

Somit erhält man die Gleichung

$$(9) \qquad Q(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) = \lim \frac{1}{t} u(\mathfrak{x}(t)) = \frac{1}{\operatorname{grad} U(\mathfrak{x}_0)} \cdot \lim \frac{1}{t} U(\mathfrak{x}(t)) = \frac{1}{|\mathfrak{R}|} \cdot (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{R}).$$

4. Eintritts- und Austrittskriterium für die Integralkurven.

Definition. Ist $\mathfrak{x}_0$ ein Randpunkt von $A \subset G$, und ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0)$ der Vektor des Richtungsfeldes im Punkte $\mathfrak{x}_0$, so hat der entsprechende Einheitsvektor entweder Eintrittsrichtung, Austrittsrichtung oder Gleitrichtung. Entsprechend soll der Randpunkt $\mathfrak{x}_0$ entweder *Eintrittspunkt*, *Austrittspunkt* oder *Gleitpunkt* heißen. Es gilt nun der

Satz 8. *Ist $\mathfrak{x}_0 = (x_0; \mathfrak{y}_0)$ ein Randpunkt des abgeschlossenen Teilbereiches A von G, und ist $\mathfrak{x}_0$ ein Eintrittspunkt (Austrittspunkt) des Richtungsfeldes der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$, so enthält jede von $\mathfrak{x}_0$ ausgehende rechtsorientierte Integralkurve für nicht zu große $x > x_0$ nur Innenpunkte (Außenpunkte) von (zu) A.*

Hieraus folgt sofort der

Satz 9. *Wenn eine von einem Eintrittspunkt oder einem Innenpunkt ausgehende vollständige rechts-orientierte Integralkurve den Bereich A durch einen Randpunkt verläßt, so kann dieser Randpunkt kein Eintrittspunkt des Richtungsfeldes sein.*

Beweis. $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ sei diejenige Parameterdarstellung einer von $\mathfrak{x}_0$ ausgehenden Integralkurve, welche der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{R}(\mathfrak{x})$$

genügt und für $t = 0$ den Anfangspunkt $\mathfrak{x}_0$ liefert. Dann konvergiert für $t \to 0$ nach Definition der Ableitung der Vektor

$$(2) \qquad \mathfrak{d} = \frac{1}{t}(\mathfrak{x}(t) - \mathfrak{x}_0) \quad \text{gegen} \quad \mathfrak{x}'(0) = \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0),$$

also auch der Einheitsvektor der Sehne

$$(3) \qquad \mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{d}}{|\mathfrak{d}|} \quad \text{gegen} \quad \mathfrak{n} = \frac{1}{|\mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0)|} \cdot \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0).$$

Für genügend kleines t sind die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt. $\mathfrak{x}(t)$ ist also Innenpunkt (Außenpunkt), wenn $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0)$ Eintrittsrichtung (Austrittsrichtung) hat. Dies war zu beweisen.

§ 3. Die Methode der einschließenden Röhrenbereiche.

1. Definition von Röhrenbereichen. Gegeben sei:

a) eine stetige Kurve durch die Gleichung $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x)$ für $a \leqq x \leqq b$,

b) eine stetige für $\mathfrak{z} \neq 0$ positive Funktion $p(\mathfrak{z})$ des n-dimensionalen Vektors $\mathfrak{z}$, die für $\mathfrak{z} = 0$ verschwindet und die Eigenschaft hat, daß für positives λ und festes $\mathfrak{z}$ $p(\lambda \mathfrak{z})$ mit wachsendem λ wächst,

c) eine stetige für $a < x < b$ positive Funktion $g(x)$.

Man setze jetzt: $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}$. Dann soll der abgeschlossene Bereich, der durch die Ungleichungen

$$(1) \qquad p(\mathfrak{z}) \leqq g(x) \quad \text{und} \quad a \leqq x \leqq b \quad \text{mit} \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)$$

definiert wird, ein Röhrenbereich R heißen.

Will man noch besonders auf die definierenden Elemente des Röhrenbereiches hinweisen, so kann man ausführlicher schreiben:

$$(2) \qquad R = R\big(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x)\big) \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b.$$

2. Einschließende Röhrenbereiche. Ein Röhrenbereich hat als Randpunkte:

1. alle die Punkte $(x; \mathfrak{y})$, für die $x = a$ und $p(\mathfrak{z}) < g(a)$ ist,
2. alle die Punkte $(x; \mathfrak{y})$, für die $x = b$ und $p(\mathfrak{z}) \leqq g(b)$ ist und
3. alle die Punkte, für die $a \leqq x < b$ und $p\big(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)\big) = g(x)$ ist.

Die Mengen der Randpunkte der zweiten und dritten Art existieren stets, während die Menge der Randpunkte der ersten Art auch leer sein kann [nämlich, wenn $g(a) = 0$ ist].

Ist nun $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}) = \big(1; \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})\big)$ das Richtungsfeld der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ und liegt der Röhrenbereich R ganz in G, so sind die Randpunkte der ersten Art stets Eintrittspunkte, weil $\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ die positive x-Komponente Eins hat. Aus demselben Grunde sind die Randpunkte der zweiten Art stets Austrittspunkte. Die Randpunkte der dritten Art können aber in verschiedene Klassen fallen.

Wenn nun aber auch die Randpunkte der dritten Art sämtlich Eintrittspunkte sind, so soll der Röhrenbereich R ein *einschließender Röhrenbereich* E heißen. Ausführlicher kann man entsprechend (1; 2)

$$(1) \qquad E = E\big(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x)\big) \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b$$

schreiben.

Wenn man nun auf einen einschließenden Röhrenbereich den Satz 9 anwendet und gleichzeitig den Satz 3 beachtet, so kommt man leicht zu dem die einschließenden Röhrenbereiche kennzeichnenden:

Satz 10. *Ist* $E = E\big(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x)\big)$ *im Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *ein einschließender Röhrenbereich für die Differentialgleichung* $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ *und* $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ *eine Lösung, welche der Abschätzung*

$$(2) \qquad p\big(\mathfrak{y}(a) - \mathfrak{Y}(a)\big) \leqq g(a)$$

genügt, so genügt sie auch der Abschätzung

$$p\left(\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{Y}(x)\right) \leqq g(x) \tag{3}$$

für alle Werte von x aus dem Intervall $a \leqq x \leqq b$.

Dieser Satz läßt sich auf die folgende Weise verallgemeinern:

Satz 11. *Es sei eine Menge von endlich oder unendlich vielen einschließenden Röhrenbereichen*

$$E_\nu = E\left(\mathfrak{Y}_\nu(x); p_\nu(\mathfrak{z}), g_\nu(x)\right) \tag{4}$$

für ein und dasselbe Intervall $a \leqq x \leqq b$ gegeben. Ist nun $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ eine Lösung, welche allen Abschätzungen

$$p_\nu\left(\mathfrak{y}(a) - \mathfrak{Y}_\nu(a)\right) \leqq g_\nu(a) \tag{5}$$

genügt, so genügt sie auch allen Abschätzungen

$$p_\nu\left(\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{Y}_\nu(x)\right) \leqq g_\nu(x) \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b. \tag{6}$$

Sind insbesondere alle Funktionen $\mathfrak{Y}_\nu(x)$ gleich ein und derselben Funktion $\mathfrak{Y}(x)$ und alle $p_\nu(\mathfrak{z})$ gleich ein und derselben Funktion $p(\mathfrak{z})$, und bezeichnet man mit $g(x)$ die untere Grenze aller Funktionen $g_\nu(x)$, so gilt unter den gemachten Voraussetzungen die Abschätzung

$$p\left(\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{Y}(x)\right) \leqq g(x) \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b \tag{7}$$

auch dann, wenn der Durchschnitt der einschließenden Röhrenbereiche selbst kein einschließender Röhrenbereich mehr ist.

3. Einige Anwendungen. Als erstes Beispiel beweisen wir eine einfache Abschätzung:

Satz 12. *Wenn in einem durch die Ungleichungen*

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \quad |\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0| \leqq K \tag{1}$$

bestimmten Zylinderbereich die rechte Seite der Differentialgleichung der Abschätzung

$$|\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})| < M \tag{2}$$

genügt, dann gilt für alle Lösungen $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(x)$ mit dem Anfangswert $\mathfrak{y}(x_0) = \mathfrak{y}_0$ die Abschätzung

$$|\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{y}_0| \leqq M \cdot (x - x_0), \tag{3}$$

sofern x dem Intervall

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \operatorname{Min}\left((x_1 - x_0); \frac{K}{M}\right) = x_0 + l \tag{4}$$

angehört.

Beweis. Wir betrachten den Röhrenbereich $R = R\left(\mathfrak{y}_0; |\mathfrak{z}|, M(x - x_0)\right)$, der durch die Ungleichung

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0| \leqq M \cdot (x - x_0) \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + l \tag{5}$$

definiert ist, und speziell dessen Randpunkte dritter Art, welche für $x_0 \leqq x < x_0 + l$ der Gleichung

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0| = M \cdot (x - x_0) \tag{6}$$

genügen und wie wir beweisen wollen sämtlich Eintrittspunkte sind. Wir unterscheiden hierbei zwischen $x = x_0$ und $x > x_0$. Für $x = x_0$ schließt der Richtungsfeld-Vektor $\mathfrak{R} = (1; \mathfrak{F}(x_0; \mathfrak{y}_0))$ mit der x-Richtung einen kleineren Winkel ein als sämtliche Richtungsvektoren der Mantellinien des Hyperkegels (5), die ja alle den Punkt $(x_0; \mathfrak{y}_0)$ treffen. Für $x > x_0$ existiert eine eindeutige innere Normale

$$\mathfrak{N} = \left(M; -\frac{(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0)}{|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|}\right) \quad \text{[Gradient entsprechend Gl. (6)]}. \tag{7}$$

Für das entsprechend Satz 7 zu bildende Skalarprodukt zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$ erhält man wegen der Abschätzung

$$(\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{N}) = M - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) \cdot \frac{(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0)}{|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|} \geqq M - |\mathfrak{F}| > 0 \quad \text{[vgl. (4)]} \tag{8}$$

stets einen positiven Wert. Somit ist nachgewiesen, daß der Röhrenbereich (5) ein einschließender Röhrenbereich ist. Daraus folgt aber auf Grund von Satz 10 die Behauptung (3).

Als zweites Beispiel beweisen wir eine Verallgemeinerung des Eindeutigkeitssatzes von Nagumo [5]. (Eine andere Verallgemeinerung bei Perron [9], Satz 2. Nach freundlicher Mitteilung von Herrn Perron läßt sich nach seinem dortigen Verfahren unser Satz ebenfalls beweisen.)

Satz 13. *Es sei* $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ *mit dem Anfangswert* $\mathfrak{y}(x_0) = \mathfrak{y}_0$. $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ *sei in einem durch die Ungleichungen*

$$x_0 \leqq x \leqq X, \quad |\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)| \leqq K \tag{9}$$

beschränkten Bereich stetig und genüge mit $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(x)$ *einer* Lipschitz-*Bedingung*

$$\left((\mathfrak{y} - \mathfrak{Y})\,(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}))\right) < L(x) \cdot (\mathfrak{y} - \mathfrak{Y})^2, \tag{10}$$

wobei die Lipschitz-*Schranke* $L(x)$ *jedoch noch der Einschränkung*

$$L(x) \cdot (x - x_0) \leqq 1 \quad \textit{für} \quad x_0 < x \leqq X \tag{11}$$

unterliegt. Dann ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x)$ *für* $x_0 \leqq x \leqq X$ *die einzige Lösung mit* $\mathfrak{y}(x_0) = \mathfrak{y}_0$.

Beweis. Es bedeutet keine wesentliche Einschränkung, wenn wir $x_0 = 0$ setzen. Die Substitution: $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}$ führt auf die Differentialgleichung

$$\mathfrak{z}' = \mathfrak{F}^*(x; \mathfrak{z}) = \mathfrak{F}\left(x; \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}\right) - \mathfrak{F}\left(x; \mathfrak{Y}(x)\right) \tag{12}$$

mit der Anfangsbedingung $\mathfrak{z}(0) = 0$ und der Lösung $\mathfrak{z}(x) = 0$ für $0 \leqq x \leqq X$. Der Lipschitz-Bedingung (10) entspricht die Bedingung

$$\left(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x; \mathfrak{z})\right) < L(x) \cdot (\mathfrak{z}^2) \quad \text{für} \quad |\mathfrak{z}| \leqq K \quad \text{und} \quad 0 \leqq x \leqq X \tag{13}$$

mit der Einschränkung

$$L(x) \cdot x \leqq 1. \tag{14}$$

Wir betrachten nun die Röhrenbereiche

$$|\mathfrak{z}| \leq M \cdot x + N \cdot x^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq X \tag{15}$$

mit positiven Zahlen M und N, die nur durch die Ungleichung

$$M \cdot X + N \cdot X^2 \leq K \tag{16}$$

beschränkt aber sonst beliebig sind. Wenn jeder dieser Röhrenbereiche ein E-Bereich ist, so folgt auf Grund von Satz 11 die Abschätzung

$$|\mathfrak{z}(x)| \leq \underline{\text{fin}}\,(M x + N x^2) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq X \tag{17}$$

und damit die Eindeutigkeit der Lösung. Es ist also nur noch zu zeigen, daß die Randpunkte $(x; \mathfrak{z})$, welche der Gleichung

$$|\mathfrak{z}| = M \cdot x + N \cdot x^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq x < X \tag{18}$$

genügen, Eintrittspunkte des Richtungsfeldes der Differentialgleichung (12)

$$\mathfrak{R}^* = \left(1; \mathfrak{F}^*(x; \mathfrak{z})\right) \tag{19}$$

sind. — Da $\mathfrak{F}^*(0; 0) = 0$ ist, so ist der Anfangspunkt $(0; 0)$ wegen $M > 0$ stets Eintrittspunkt. Für $x > 0$ existiert die innere Normale

$$\mathfrak{N} = \left(M + 2N\, x; -\frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|}\right) = \operatorname{grad}\left(M x + N x^2 - |\mathfrak{z}|\right). \tag{20}$$

Für das Skalarprodukt $(\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}^*)$ erhalten wir die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned} (\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}^*) &= M + 2N\, x - |\mathfrak{z}| \cdot \frac{(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x; \mathfrak{z}))}{(\mathfrak{z})^2} \geq M + 2N\, x - (M x + N x^2) \times \\ &\times L(x) = M \cdot \left(1 - x \cdot L(x)\right) + 2N\, x \cdot \left(1 - \frac{x}{2} \cdot L(x)\right) \geq N x > 0. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

[Vgl. (18), (16), (13) und (14).]

Es ist also positiv, und nach Satz 7 sind dann alle Punkte, die für $0 < x < X$ der Gl. (18) genügen, Eintrittspunkte.

Als drittes Beispiel folgt eine Verallgemeinerung des Eindeutigkeitssatzes von OSGOOD [6]. (Vgl. auch SANSONE [10], S. 102.)

Satz 14. *Wie bei Satz* 13, *aber mit der* LIPSCHITZ-*Bedingung*

$$\left((\mathfrak{y} - \mathfrak{Y})\,(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}))\right) < h(x) \cdot w(|\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}|) \cdot |\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}|. \tag{22}$$

Hierbei sei $w(z)$ *eine stetige für* $z > 0$ *positive und für* $z = 0$ *verschwindende Funktion von* z *mit der weiteren Eigenschaft:*

$$\lim_{c \to 0}\left(\int_c^z \frac{dr}{w(r)}\right) = +\infty. \quad (c > 0) \tag{23}$$

$h(x)$ *soll für* $x_0 < x \leq X$ *stetig sein, und das Integral*

$$\int_{x_0}^{X} h(s)\, ds \tag{24}$$

soll existieren.

Beweis. Wie beim Beweis von Satz 13 mit $x_0 = 0$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}$, aber entsprechend der neuen LIPSCHITZ-Bedingung (22) mit der Bedingung

$$(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x;\mathfrak{z})) < h(x) \cdot w(|\mathfrak{z}|) \cdot |\mathfrak{z}| \quad \text{für} \quad |\mathfrak{z}| \leq K. \tag{25}$$

Wir betrachten die Röhrenbereiche

$$|\mathfrak{z}| \leq g_c(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq X, \tag{26}$$

wobei $g_c(x)$ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dg}{dx} = w(g) \cdot h(x) \quad \text{mit} \quad g(0) = c > 0 \tag{27}$$

ist. Sie genügt mit $g = g_c(x)$ der Gleichung

$$\int_c^g \frac{dr}{w(r)} = \int_0^x h(s)\, ds \tag{28}$$

und geht mit $c \to 0$ gleichmäßig für alle x im Intervall $0 \leq x \leq X$ gegen Null; denn die rechte Seite von (28) ist gleichmäßig beschränkt, und da $w(z)$ positiv ist, so gibt es wegen (23) zu jedem hinreichend kleinen c eine Zahl $d = d(c)$, derart daß das Integral

$$\int_c^d \frac{dr}{w(r)} \geq \int_0^x h(s)\, ds \tag{29}$$

ist und gleichzeitig mit $c \to 0$ auch $d \to 0$ geht. Wegen (28) muß dann $g_c(x) \leq d(c)$ sein, woraus die Behauptung folgt. — Für hinreichend kleines c gilt also für alle Randpunkte $(x;\mathfrak{z})$, welche der Gleichung

$$|\mathfrak{z}| = g_c(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x < X \tag{30}$$

genügen, die Abschätzung $|\mathfrak{z}| \leq K$, so daß wir die Bedingung (25) verwenden können. Es genügt zu beweisen, daß diese Randpunkte für $x > 0$ Eintrittspunkte sind. Eine Lösung $\mathfrak{z}(x)$ nämlich, welche für $x = 0$ durch den Anfangspunkt $(0;0)$, der ja wegen $g_c(0) > 0$ ein Randpunkt erster Art ist, in den Röhrenbereich (26) eintritt, kann für $x = 0$ nicht gleichzeitig austreten. Wir berechnen

$$\mathfrak{N} = \operatorname{grad}\left(g_c(x) - |\mathfrak{z}|\right) = \left(g_c'(x); -\frac{\mathfrak{z}}{|\mathfrak{z}|}\right) \tag{31}$$

und erhalten unter Verwendung von (27) und (22) die Abschätzung

$$(\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{N}^*) = g_c'(x) - \frac{(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x;\mathfrak{z}))}{|\mathfrak{z}|} = w(|\mathfrak{z}|)\left(h(x) - \frac{(\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{F}^*(x;\mathfrak{z}))}{w(|\mathfrak{z}|) \cdot |\mathfrak{z}|}\right) > 0. \tag{32}$$

Hieraus folgt ähnlich wie beim Beweis des vorigen Satzes die Eindeutigkeit der Lösung.

Diese Beispiele mögen zunächst genügen, um die Methode der einschließenden Röhrenbereiche zu demonstrieren. Es soll nur noch ein weiterer Eindeutigkeitssatz genannt werden, der sich auf die gleiche einfache Weise beweisen

läßt wie die Sätze 13 und 14. Es handelt sich hierbei um eine Verallgemeinerung des Eindeutigkeitssatzes von SCORZA-DRAGONI [11], deren Beweis hier jedoch unterdrückt werden soll.

Satz 15. *Wie bei Satz 13, mit der* LIPSCHITZ*-Bedingung von Satz 14, wobei die Funktion $w(z)$ dieselben Eigenschaften haben soll. Dagegen soll $h(x)$ eine für $x_0 < x \leqq X$ positive und stetige Funktion von x sein und zu $w(z)$ in der folgenden Beziehung stehen: Es soll zu jedem $\bar{z} > 0$ ein $\bar{c} > 0$ und ein $z' > 0$ geben, derart, daß für $0 < c < \bar{c}$ die Ungleichung*

$$\int_{x_0+c}^{X} h(s)\,ds \leqq \int_{cz'}^{\bar{z}} \frac{dr}{w(r)} \tag{33}$$

erfüllt ist.

§ 4. Eine spezielle Klasse von Röhrenbereichen.

1. Definitionen. Ein spezieller Röhrenbereich

$$R = R\big(\mathfrak{Y}(x); \mathfrak{p}(\mathfrak{z}), g(x)\big) \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b \tag{1}$$

soll die folgenden Bedingungen erfüllen.

Erstens gilt für die Funktion $\mathfrak{Y}(x)$: $\mathfrak{Y}(x)$ ist für $a \leqq x < b$ nach rechts differenzierbar und erfüllt eine LIPSCHITZ-Bedingung

$$|\mathfrak{Y}(x_1) - \mathfrak{Y}(x_2)| \leqq K \cdot |x_1 - x_2|. \tag{2}$$

Zweitens gilt für die Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$:

(3) $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ ist positiv für $\mathfrak{z} \neq 0$ und stetig für alle $\mathfrak{z}$,

$$\mathfrak{p}(h \cdot \mathfrak{z}) = h \cdot \mathfrak{p}(\mathfrak{z}) \quad \text{für} \quad h \geqq 0, \tag{4}$$

$\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ erfüllt eine LIPSCHITZ-Bedingung

$$|\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_2)| \leqq C \cdot |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2| \tag{5}$$

oder die in Verbindung mit (3) und (4) schärfere Bedingung

$$|\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_2)| \leqq \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2) \tag{5a}$$

und ist nach jeder Richtung hin differenzierbar. Das soll heißen: Es existiert für jeden n-dimensionalen Vektor $\mathfrak{v}$ und $t > 0$ der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big(\mathfrak{p}(\mathfrak{z} + t \cdot \mathfrak{v}) - \mathfrak{p}(\mathfrak{z})\big) = [\mathfrak{v} \nabla \mathfrak{p}](\mathfrak{z}). \tag{6}$$

Drittens gilt für die Funktion $g(x)$:

$$g(x) > 0 \quad \text{für} \quad a < x < b, \quad g(a) \geqq 0 \quad \text{und} \quad g(b) \geqq 0; \tag{7}$$

$g(x)$ erfüllt eine LIPSCHITZ-Bedingung

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq c \cdot |x_1 - x_2| \tag{8}$$

und

$$g(x) \quad \text{ist für} \quad a \leq x < b \tag{9}$$

nach rechts differenzierbar.

Ergänzend wird gezeigt, daß aus der Bedingung (5a) in Verbindung mit den Voraussetzungen (3) und (4) eine LIPSCHITZ-Bedingung (5) folgt. Es gilt nämlich die Abschätzung

$$p(\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2) = |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2| \cdot p\left(\frac{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2}{|\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|}\right) \leq |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2| \cdot \operatorname{Max}\left(p(\mathfrak{z}^0)\right), \tag{10}$$

so daß die LIPSCHITZ-Bedingung (5) erfüllt ist, wenn man für C das wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $p(\mathfrak{z})$ sicher existierende Maximum von $p(\mathfrak{z}^0)$ für alle Einheitsvektoren $\mathfrak{z}^0$ einsetzt. Durch Verwendung der Bedingung (5a) können also die zur Anwendung kommenden Funktionen $p(\mathfrak{z})$ weiter spezialisiert werden. Die Bedingung (5a) ist äquivalent mit der Bedingung

$$p(\mathfrak{z}_1) + p(\mathfrak{z}_2) \geq p(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2) \quad \text{mit beliebigen } \mathfrak{z}_1 \text{ und } \mathfrak{z}_2 \tag{11}$$

oder auch äquivalent der Bedingung

$$p\left((1-j)\,\mathfrak{z}_1 + j \cdot \mathfrak{z}_2\right) \leq (1-j) \cdot p(\mathfrak{z}_1) + j \cdot p(\mathfrak{z}_2) \quad \text{für} \quad 0 \leq j \leq 1, \tag{12}$$

was bedeutet, daß die Punktmenge $\mathfrak{z}$ mit $p(\mathfrak{z}) \leq \text{const}$ konvex ist.

Anmerkung. Die $\mathfrak{v}$-Ableitung von p an der Stelle $\mathfrak{z}$ stellt gewissermaßen eine Verallgemeinerung der Gradientenbildung dar. Wenn nämlich der Gradient von $p(\mathfrak{z})$ existiert und stetig ist, so ist

$$[\mathfrak{v} \triangledown p](\mathfrak{z}) = \mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} p(\mathfrak{z}). \tag{13}$$

Dieses kann an Hand von (6) unmittelbar eingesehen werden.

2. Folgerungen. Auf Grund der über die Funktion $p(\mathfrak{z})$ gemachten Voraussetzungen können folgende weitere Aussagen gemacht werden.

Satz 16. *Bezeichnet man mit $\mathfrak{z}^0$ den mit $\mathfrak{z}$ gleichgerichteten Einheitsvektor, so gibt es für $p(\mathfrak{z}^0)$ ein positives Minimum*

$$\underline{P} = \operatorname{Min} p(\mathfrak{z}^0) \leq p(\mathfrak{z}^0) \quad \textit{für alle } \mathfrak{z}^0. \tag{1}$$

Also folgt weiter für zwei gleichgerichtete Vektoren $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ die Abschätzung

$$|p(\mathfrak{z}_1) - p(\mathfrak{z}_2)| \geq \underline{P} \cdot |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|. \tag{2}$$

Beweis. Auf der abgeschlossenen Punktmenge aller $\mathfrak{z}^0$ (Oberfläche einer n-dimensionalen Einheitskugel) nimmt die auf Grund der LIPSCHITZ-Bedingung (1.5) stetige Funktion $p(\mathfrak{z})$ ihr Minimum an. Dies ist wegen (1.3) positiv. So folgt die Behauptung (1). Die Abschätzung (2) folgt dann aber sofort auf Grund der Voraussetzung (1.4).

Ferner gilt für die durch den Grenzwert (1.6) definierte $\mathfrak{v}$-Ableitung von $p(\mathfrak{z})$ der

Satz 17. *Die $\mathfrak{v}$-Ableitung von p an der Stelle $\mathfrak{z}$ erfüllt als Funktion von $\mathfrak{v}$ die* LIPSCHITZ-*Bedingung bzw. Bedingung*:

$$(3) \qquad |[\mathfrak{v}_1 \triangledown p](\mathfrak{z}) - [\mathfrak{v}_2 \triangledown p](\mathfrak{z})| \leq C \cdot |\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2|, \quad \text{bzw.} \quad \leq p(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)$$

mit der LIPSCHITZ-*Schranke C nach* (1.5) *und die Relationen*

$$(4) \qquad [(h \cdot \mathfrak{v}) \triangledown p](\mathfrak{z}) = h \cdot [\mathfrak{v} \triangledown p](\mathfrak{z}) \quad \textit{für} \quad h \geq 0$$

und

$$(5) \qquad [\mathfrak{v} \triangledown p](h \cdot \mathfrak{z}) = [\mathfrak{v} \triangledown p](\mathfrak{z}) \quad \textit{für} \quad h > 0.$$

Beweis. Wegen (1.5), (1.6) gilt die Abschätzung

$$|[\mathfrak{v}_1 \triangledown p](\mathfrak{z}) - [\mathfrak{v}_2 \triangledown p](\mathfrak{z})| = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot |p(\mathfrak{z} + t \cdot \mathfrak{v}_1) - p(\mathfrak{z} + t \cdot \mathfrak{v}_2)|$$

$$\leq \lim_{t \to 0} \frac{C}{t} \cdot |t \cdot \mathfrak{v}_1 - t \cdot \mathfrak{v}_2| = C \cdot |\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2|, \quad \text{bzw.} \quad \lim \frac{1}{t} p(t(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)) = p(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2).$$

Damit ist die Behauptung (3) bewiesen. — Die Relation (4) ist für $h = 0$ trivial. Für $h > 0$ setzen wir $h \cdot t = s$ und erhalten entsprechend (1.6) die Gleichung

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (p(\mathfrak{z} + t h \cdot \mathfrak{v}) - p(\mathfrak{z})) = h \cdot \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} (p(\mathfrak{z} + s \mathfrak{v}) - p(\mathfrak{z})),$$

womit (4) bewiesen ist. Zum Beweis der Relation (5) setzen wir $t = h \cdot s$ und erhalten entsprechend unter Verwendung von (1.4):

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (p(h\mathfrak{z} + t\mathfrak{v}) - p(h\mathfrak{z})) = \lim_{s \to 0} \frac{h}{h s} (p(\mathfrak{z} + s\mathfrak{v}) - p(\mathfrak{z})).$$

Damit ist auch die Relation (5) bewiesen.

3. Abschätzungen für $u(\mathfrak{x})$. Es gilt der

Satz 18. *Ist $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y})$ ein Punkt aus G mit $a \leq x < b$, so genügt die unter § 2.1 definierte Funktion $u(\mathfrak{x})$ der Abschätzung*

$$(1) \qquad \underline{P} \cdot |u(\mathfrak{x})| \leq |g(x) - p(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x))|.$$

Beweis. Man betrachte bei festem x die Randpunkte $\mathfrak{x}_r = (x; \mathfrak{y}_r)$, für die definitionsgemäß $g(x) = p(\mathfrak{y}_r - \mathfrak{Y}(x))$ ist, und wähle $\mathfrak{y}_r$ gerade so, daß die Vektoren $\mathfrak{z}_r = \mathfrak{y}_r - \mathfrak{Y}(x)$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)$ gleichgerichtet sind. Dann erhält man unter Verwendung von Satz 16 die Abschätzung

$$|g(x) - p(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x))| = |p(\mathfrak{z}_r) - p(\mathfrak{z})| \geq \underline{P} \cdot |\mathfrak{z}_r - \mathfrak{z}| = \underline{P} \cdot |\mathfrak{x}_r - \mathfrak{x}| \geq \underline{P} \cdot |u(\mathfrak{x})|;$$

denn definitionsgemäß enthält die Umgebung von $\mathfrak{x}$ mit dem Radius $|u(\mathfrak{x})|$ niemals einen Randpunkt $\mathfrak{x}_r$ im Inneren.

Eine zweite Abschätzung erhalten wir in dem

Satz 19. *Ist* $\mathfrak{x}_0=(x_0;\mathfrak{y}_0)$ *ein Randpunkt mit* $a\leqq x_0<b$ *(Randpunkt dritter Art), und ist* $\mathfrak{x}=(x;\mathfrak{y})$ *ein hinreichend nahe an* $\mathfrak{x}_0$ *gelegener Punkt mit* $x_0\leqq x<b$, *so gilt die Abschätzung*

$$|u(\mathfrak{x})|\geqq \operatorname{Min}\left(x-x_0;\ \frac{1}{W}\cdot|g(x)-\mathfrak{p}(\mathfrak{y}-\mathfrak{Y}(x))|\right) \tag{2}$$

mit $W=\sqrt{(c+CK)^2+C^2}$, *wobei für* c, C *und* K *die* Lipschitz-*Schranken nach* § 4, 1.(8), (5) *und* (2) *eingesetzt sind.*

Beweis. Da $\mathfrak{x}_0$ ein Punkt aus G und außerdem $x_0<b$ ist, so gibt es eine abgeschlossene $(n+1)$-dimensionale Kugelumgebung von $\mathfrak{x}_0$ mit einem Radius $r=2s$, welche nur aus Punkten von G besteht, aber keinen Punkt aus der Hyperebene $x=b$ enthält. Man betrachte nun einen Punkt $\mathfrak{x}=(x;\mathfrak{y})$ mit $|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0|\leqq s$. Die abgeschlossene Kugel um $\mathfrak{x}$ mit dem Radius $|u(\mathfrak{x})|$ liegt dann ebenfalls ganz in G und enthält keinen Punkt aus der Hyperebene $x=b$, da ja auf jeden Fall $|u(\mathfrak{x})|\leqq|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0|\leqq s$ ist. Einer der Randpunkte dieser Kugel um $\mathfrak{x}$ muß nach Definition von $u(\mathfrak{x})$ entweder ein Randpunkt des Röhrenbereiches oder ein nicht mehr zu G gehörender Punkt sein. Da die zweite Möglichkeit nicht mehr besteht, so gibt es also einen Randpunkt $\mathfrak{x}_r=(x_r;\mathfrak{y}_r)$ des Röhrenbereiches, welcher der Gleichung $|\mathfrak{x}_r-\mathfrak{x}|=|u(\mathfrak{x})|$ genügt. Dieser Punkt ist entweder ein Randpunkt erster Art mit $x_r=a$, $\mathfrak{y}_r=\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_r-\mathfrak{Y}(a))<g(a)$ oder ein Randpunkt dritter Art, welcher der Gleichung: $g(x_r)=\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_r-\mathfrak{Y}(x_r))$ genügt.

Im ersten Falle gilt offenbar die Abschätzung

$$|u(\mathfrak{x})|=x-a\geqq x-x_0. \tag{3}$$

Im anderen Falle erhält man unter Verwendung der Lipschitz-Schranken nach § 4, 1.(2), (5), (8) und der Schwarzschen *Ungleichung* die Abschätzung:

$$\begin{aligned}(4)\quad |g(x)-\mathfrak{p}(\mathfrak{y}-\mathfrak{Y}(x))| &= |(g(x)-g(x_r))-(\mathfrak{p}(\mathfrak{y}-\mathfrak{Y}(x))-\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_r-\mathfrak{Y}(x_r)))|\\ &\leqq |g(x)-g(x_r)|+|\mathfrak{p}(\mathfrak{y}-\mathfrak{Y}(x))-\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_r-\mathfrak{Y}(x_r))|\\ &\leqq c\cdot|x-x_r|+C\cdot(|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_r|+|\mathfrak{Y}(x)-\mathfrak{Y}(x_r)|)\\ &\leqq c\cdot|x-x_r|+C\cdot|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_r|+C\cdot K\cdot|x-x_r|\\ &\leqq \sqrt{(c+CK)^2+C^2}\cdot\sqrt{(x-x_r)^2+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_r)^2}=W\cdot|u(\mathfrak{x})|.\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also die Abschätzung (2).

4. Eintritts-, Austritts- und Gleitrichtungen. Für die Röhrenbereiche der speziellen Klasse gelten die folgenden Kriterien:

Satz 20. *Der* $(n+1)$*-dimensionale Vektor* $\mathfrak{w}=(1;\mathfrak{v})$ *hat im Randpunkte* $\mathfrak{x}_0=(x_0;\mathfrak{y}_0)$ *mit* $a\leqq x_0<b$ *und* $g(x_0)=\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0-\mathfrak{Y}(x_0))$ *genau dann Eintrittsrichtung, wenn die Ungleichung*

$$g'_+(x_0)>[(\mathfrak{v}-\mathfrak{Y}'_+(x_0))\nabla\mathfrak{p}](\mathfrak{y}_0-\mathfrak{Y}(x_0)) \tag{1}$$

gilt, genau dann Austrittsrichtung, wenn die Ungleichung

$$g'_+(x_0) < [(\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}'_+(x_0)) \triangledown \mathfrak{p}]\,(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0)) \tag{2}$$

gilt und genau dann Gleitrichtung, wenn die Gleichung

$$g'_+(x_0) = [(\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}'_+(x_0)) \triangledown \mathfrak{p}]\,(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0)) \tag{3}$$

gilt, wobei $g'_+(x_0)$ bzw. $\mathfrak{Y}'_+(x_0)$ die rechtsseitigen Ableitungen von $g(x)$ bzw. $\mathfrak{Y}(x)$ an der Stelle $x = x_0$ bedeuten.

Beweis. Zunächst läßt sich zeigen, daß die rechten Seiten der Ungleichungen (1) und (2) bzw. der Gl. (3) gleich dem Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\mathfrak{p}(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0))\right) = [(\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}'_+(x_0)) \triangledown \mathfrak{p}]\,(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0)) \tag{4}$$

mit $x = x_0 + t$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v}$ ist. Dieser ist nämlich gleich

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0) + t(\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}'_+(x_0))) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0))\right), \tag{5}$$

weil der Unterschied zwischen den Grenzwerten (4) und (5):

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\left|\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t\cdot\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t)) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t\cdot\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0) - t\cdot\mathfrak{Y}'_+(x_0))\right|\right) \\ \qquad \leq C \cdot \lim\limits_{t\to 0} \left| \frac{1}{t} \left(\mathfrak{Y}(x_0 + t) - \mathfrak{Y}(x_0)\right) - \mathfrak{Y}'_+(x_0) \right| = 0 \end{cases} \tag{6}$$

auf Grund der LIPSCHITZ-Bedingung (§ 4, 1.(5)) und nach Definition der Ableitung verschwindet. Ferner ist die linke Seite von (1), (2) oder (3) gleich dem Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(g(x_0 + t) - g(x_0)\right) = g'_+(x_0). \tag{7}$$

Berücksichtigt man nun noch die vorausgesetzte Gleichung:

$$g(x_0) = \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 - \mathfrak{Y}(x_0)),$$

so erkennt man sofort, daß das Bestehen der Ungleichungen (1) bzw. (2) bzw. der Gl. (3) damit gleichbedeutend ist, daß der Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(g(x_0 + t) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t\cdot\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t))\right) > 0, \quad (< 0) \quad \text{bzw.} \quad (= 0) \tag{8}$$

positiv bzw. negativ bzw. gleich Null ist. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall. Der Grenzwert (8) ist positiv. Dann sind die Punkte $\mathfrak{x}(t) = (x_0 + t;\ \mathfrak{y}_0 + t\cdot\mathfrak{v})$ für hinreichend kleine Werte von $t > 0$ sämtlich Innenpunkte, weil nur in diesem Falle $g(x_0 + t) > \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t\,\mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t))$ sein kann. Dann kann aber der Vektor $\mathfrak{w} = (1;\mathfrak{v})$, bzw. der gleichgerichtete Einheitsvektor $\mathfrak{w}^0$, auf keinen Fall Austrittsrichtung haben. (Vgl. Satz 6 mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} = \mathfrak{w}^0$.) Er hat also Eintritts- oder Gleitrichtung.

Zweiter Fall. Der Grenzwert (8) ist negativ. Dann folgt in entsprechender Weise, daß der Vektor $\mathfrak{w}$ nur Austritts- oder Gleitrichtung haben kann.

Dritter Fall. Der Grenzwert (8) ist gleich Null. Dann folgt mit Hilfe von Satz 18, daß der Vektor $\mathfrak{w}$ Gleitrichtung haben muß. Wenn man nämlich die unter Satz 18 stehende Ungleichung (1) beiderseits durch den positiven Wert t dividiert und $\mathfrak{x} = (x_0 + t; \mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v})$ einsetzt, so erhält man nach dem Grenzübergang die Abschätzung

$$(9) \qquad \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(|u(\mathfrak{x})| \right) \leqq \frac{1}{P} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(|g(x_0 + t) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t))| \right) = 0.$$

Dieses ist aber nach § 2, 2.(2) gleichbedeutend damit, daß der Vektor $\mathfrak{w}$ bzw. $\mathfrak{n} = \mathfrak{w}^0$ Gleitrichtung hat.

Schließlich kann man unter Verwendung von Satz 19 auch noch zeigen, daß in den ersten beiden Fällen der Vektor $\mathfrak{w}$ in Wirklichkeit niemals Gleitrichtung haben kann, womit dann der Satz 20 endlich bewiesen ist. Hat der Vektor $\mathfrak{w}$ bzw. der gleichgerichtete Einheitsvektor $\mathfrak{w}^0$ Gleitrichtung, so gilt nach Definition der Gleitrichtungen [§ 2, 2.(2)] mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{w}^0$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{n}$ die Ungleichung

$$(10) \qquad \underline{\lim} \frac{1}{t} \left(u(\mathfrak{x}) \right) \leqq 0 \leqq \overline{\lim} \frac{1}{t} \left(u(\mathfrak{x}) \right) \qquad \left(u(\mathfrak{x}_0) = 0 \right)!$$

Da nun $u(\mathfrak{x})$ als Funktion von t stetig ist, so folgt daraus sofort die Gleichung

$$(11) \qquad \underline{\lim} \frac{1}{t} \left(|u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{w}^0)| \right) = \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \cdot \underline{\lim} \frac{1}{t} \left(|u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{w})| \right) = 0.$$

Nach Satz 19 gilt nun aber, wenn man auf der rechten Seite der dort stehenden Ungleichung (2) $x = x_0 + t$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v}$ einsetzt und anschließend beide Seiten durch t dividiert, die Abschätzung

$$(12) \qquad \frac{1}{t} \left(|u(\mathfrak{x}_0 + t \cdot \mathfrak{w})| \right) \geqq \operatorname{Min} \left(1; \frac{1}{W \cdot t} \left(|g(x_0 + t) - \mathfrak{p}(\mathfrak{y}_0 + t \cdot \mathfrak{v} - \mathfrak{Y}(x_0 + t))| \right) \right).$$

Wäre nun der sicher existierende Grenzwert der rechten Seite dieser Ungleichung positiv, so wäre auch jeder Häufungswert der linken Seite positiv, was aber der Gl. (11) widersprechen würde. Der Grenzwert der rechten Seite ist also gleich Null und damit auch der Grenzwert (8). Dieser Sachverhalt widerspricht jedoch den Voraussetzungen zu den ersten beiden Fällen. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

5. Einschließende Röhrenbereiche. Notwendig und hinreichend dafür, daß der Röhrenbereich $R\left(\mathfrak{Y}(x); \mathfrak{p}(\mathfrak{z}), g(x)\right)$ für $a \leqq x \leqq b$ ein einschließender Röhrenbereich für die Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ ist, ist, daß das Richtungsfeld $\mathfrak{R}(\mathfrak{x}) = \left(1; \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})\right)$ für alle Randpunkte dritter Art, die für $a \leqq x < b$ der Gleichung $g(x) = \mathfrak{p}\left(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)\right)$ genügen, Eintrittsrichtung hat. Unter Verwendung des Satzes 20 [Ungleichung (1)] erhält man dann mit $\mathfrak{w} = \mathfrak{R}(\mathfrak{x})$ und $x_0 = x$ sofort den

Satz 21. *Der spezielle Röhrenbereich* $R\left(\mathfrak{Y}(x); \mathfrak{p}(\mathfrak{z}), g(x)\right)$ *ist für* $a \leqq x \leqq b$ *genau dann ein einschließender Röhrenbereich für die Differentialgleichung*

$\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$, *wenn für alle Randpunkte* $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y})$ *mit* $a \leqq x < b$ *und* $g(x) = p(\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x))$ *die Ungleichung*

$$g'_+(x) > \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{Y}'_+(x)\right) \triangledown p\right](\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}(x)) \tag{1}$$

erfüllt ist.

6. Hüllfunktion und LIPSCHITZ-Grenze. Wenn wir in Satz 21 $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}$ setzen, so erhalten wir die Aussage, daß ein spezieller Röhrenbereich $R(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x))$ genau dann ein einschließender Röhrenbereich ist, wenn für jedes feste x im Intervall $a \leqq x < b$ und alle n-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{z}$, die der Gleichung: $p(\mathfrak{z}) = g(x)$ genügen, die Ungleichung:

$$g'_+(x) > \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}) - \mathfrak{Y}'_+(x)\right) \triangledown p\right](\mathfrak{z}) \tag{1}$$

erfüllt ist. Wenn wir die Funktionen $\mathfrak{Y}(x)$ und $p(\mathfrak{z})$ als gegeben betrachten, so stellt diese Ungleichung eine Bedingung für die noch zu bestimmende Funktion $g(x)$ dar. Bei festem x steht auf der linken Seite die rechtsseitige Ableitung von $g(x)$, also eine Konstante, während auf der rechten Seite eine Funktion des Vektors $\mathfrak{z}$ steht, der allerdings noch durch die Bedingung: $p(\mathfrak{z}) = g(x)$ eingeschränkt ist. Somit steht rechts eine $(n-1)$-parametrige Schar von Zahlen, auf deren obere Grenze es offenbar ankommt. Diese hängt dann nur noch von dem Wert der Funktion $g(x)$ ab. Von der Existenz dieser oberen Grenze hängt es nun wesentlich ab, ob es eine der Bedingung (1) genügende Funktion $g(x)$ überhaupt gibt. Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz:

Satz 22. *Für jeden festen Punkt* $\mathfrak{x}_1 = (x; \mathfrak{Y})$ *aus* G *ist die obere Grenze* $\bar{g}(x; \mathfrak{Y})$ *all der Zahlen* g, *für die unter der Nebenbedingung:* $p(\mathfrak{z}) \leqq g$ *sämtliche Punkte* $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{y}) = (x; \mathfrak{Y} + \mathfrak{z})$ *auch noch in* G *liegen, entweder eine positive Zahl, oder die Zahlen* g *können beliebig groß sein. Dann setzen wir* $\bar{g}(x; \mathfrak{Y}) = +\infty$. *Für* $g < \bar{g}(x; \mathfrak{Y})$ *liegen dann auch alle oben bezeichneten Punkte* $\mathfrak{x}$ *in* G.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß es zu jedem Punkt $\mathfrak{x}_1 = (x; \mathfrak{Y})$ positive Zahlen g gibt, so daß mit $p(\mathfrak{z}) \leqq g$ sämtliche Punkte $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{Y} + \mathfrak{z})$ zu G gehören. Nach Satz 16 mit $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_2 = 0$ ist aber wegen $p(\mathfrak{z}) \leqq g$ für hinreichend kleines g auch $|\mathfrak{z}|$ so klein, daß die oben bezeichneten Punkte $\mathfrak{x}$ in der offenen Menge G enthalten sein müssen. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Alsdann *definieren* wir die Punktmengen:

$$J(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g) \quad \text{bzw.} \quad \bar{J}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g) \tag{2}$$

im $(2n+2)$-dimensionalen Raum der Punkte $S = (x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g)$ wie folgt: Die Punkte $(x; \mathfrak{y})$ liegen in G. $\mathfrak{Y}'$ ist ein beliebiger n-dimensionaler Vektor mit derselben Orthogonalbasis wie $\mathfrak{Y}$. Die Zahl g genügt den Ungleichungen:

$$0 < g < \bar{g}(x; \mathfrak{Y}) \quad \text{bzw.} \quad 0 \leqq g < \bar{g}(x; \mathfrak{Y}). \tag{3}$$

Schließlich betrachten wir die Ausdrücke

$$D(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; \mathfrak{z}) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + \mathfrak{z}) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown p\right](\mathfrak{z}) \tag{4}$$

und wollen ihre obere Grenze bei festem $(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}')$ und variablem $\mathfrak{z}$ unter der Nebenbedingung: $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}) = g$:

$$H(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g) = \overline{\text{fin}}\, D(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; \mathfrak{z}) \tag{5}$$

die *Hüllfunktion* der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ bezüglich der Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ nennen. Daneben betrachten wir die Ausdrücke

$$\overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g, \mathfrak{z}^*) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}^*) \tag{6}$$

und wollen deren obere Grenze bei festem $(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g)$ und variablem $\mathfrak{z}^*$ unter der Nebenbedingung: $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}^*) = 1$:

$$\overline{H}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g) = \overline{\text{fin}}\, \overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g, \mathfrak{z}^*) \tag{7}$$

die *ergänzte Hüllfunktion* nennen. Es gilt nun der

Satz 23. *Die Hüllfunktion $H(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g)$ ist in der ganzen Punktmenge J stetig. Die ergänzte Hüllfunktion ist in der ganzen Punktmenge $\bar{J}$ stetig. Für $g > 0$, also in der Punktmenge J, ist $H = \overline{H}$. Für $g = 0$ ist $H \leqq \overline{H}$. Ist aber $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ konvex (vgl. § 4, 1.(5a)), dann ist auch für $g = 0$ $H = \overline{H}$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß die Hüllfunktion für $g > 0$ mit der ergänzten Hüllfunktion übereinstimmt. Hierzu setzen wir $\mathfrak{z} = g \cdot \mathfrak{z}^*$. Dann ist die Nebenbedingung: $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{p}(g \cdot \mathfrak{z}^*) = g \cdot \mathfrak{p}(\mathfrak{z}^*) = g$ zu (5) gleichbedeutend mit der Nebenbedingung zu (7). Ebenso stimmen die Ausdrücke (4) und (6) überein für $\mathfrak{z} = g \cdot \mathfrak{z}^*$; denn es ist

$$\left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](g \cdot \mathfrak{z}^*) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}^*) \tag{8}$$

auf Grund von Satz 17 (5). Dann müssen aber auch ihre oberen Grenzen übereinstimmen. Alsdann zeigen wir, daß für $g = 0$ die Ungleichung $H \leqq \overline{H}$ gilt. Wir erhalten nämlich für $g = 0$ die Gleichung

$$H(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0) = D(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](0) = \mathfrak{p}\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\right). \tag{9}$$

Diesen Wert nimmt aber der Ausdruck $\overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0, \mathfrak{z}^*)$ für denjenigen Vektor $\mathfrak{z}^*$, der dem Vektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'$ gleichgerichtet ist, auch an. Daraus folgt unmittelbar die behauptete Ungleichung; denn der Ausdruck $\overline{D}$ kann nicht größer sein als seine obere Grenze $\overline{H}$. Wenn nun aber die Funktion $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ *konvex* ist, so erhalten wir mit Hilfe des Satzes 17, indem wir dort $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'$ und $\mathfrak{v}_2 = 0$ setzen, die Abschätzung

$$\overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0, \mathfrak{z}^*) = \left[\left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\right) \triangledown \mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}^*) \leqq \mathfrak{p}\left(\mathfrak{F}(x, \mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\right). \tag{10}$$

Da diese Abschätzung für alle $\mathfrak{z}^*$ mit $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}^*) = 1$ gleichmäßig gilt, ist sie auch für die obere Grenze $\overline{H}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; 0)$ richtig. Durch Vergleich mit (9) erhält man sofort die Ungleichung: $H \geqq \overline{H}$. Dies ergibt im Verein mit der oben bewiesenen Ungleichung: $H \leqq \overline{H}$ die Behauptung. — Hiernach ist nur noch zu zeigen, daß die ergänzte Hüllfunktion in der ganzen Punktmenge $\bar{J}$ als stetige Funktion von $S = (x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g)$ existiert. — Man kann leicht zeigen, daß die Ausdrücke $\overline{D}(S, \mathfrak{z}^*)$ für jeden festen Punkt S in $\bar{J}$ als Funktion von

$\mathfrak{z}^*$ eine obere Schranke besitzen, woraus die *Existenz* ihrer oberen Grenze $\overline{H}(S)$ unmittelbar folgt. Nach Satz 17 ist nämlich mit $\mathfrak{v}_2 = 0$ und $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'$:

$$|\overline{D}(x; \mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'; g, \mathfrak{z}^*)| \leq C \cdot |\mathfrak{F}(x; + g \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}'|. \tag{11}$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung bei festem S als stetige Funktion des Vektors $\mathfrak{z}^*$ [vgl. (3)] auf der abgeschlossenen Menge aller $\mathfrak{z}^*$ mit $p(\mathfrak{z}^*) = 1$ einen *Maximalwert* annimmt, ist damit die Existenz einer von $\mathfrak{z}^*$ unabhängigen Schranke für die Ausdrücke $\overline{D}(S, \mathfrak{z}^*)$ nachgewiesen. — Somit ist nur noch nachzuweisen, daß $\overline{H}(S)$ *stetig* ist. Wir zeigen es wie folgt: Die Ausdrücke $\overline{D}(S, \mathfrak{z}^*)$, deren obere Grenze die Funktion $\overline{H}(S)$ ist, sind für jedes feste $\mathfrak{z}^*$ mit $p(\mathfrak{z}^*) = 1$ stetige Funktionen von S; und zwar sind sie in jedem Punkte S für alle $\mathfrak{z}^*$ mit $p(\mathfrak{z}^*) = 1$ *gleichgradig stetig*. Hierzu betrachten wir einen festen Punkt $S_1 = (x_1; \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_1'; g_1)$ und einen hinreichend nahe an S_1 gelegenen Punkt $S_2 = (x_2; \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_2'; g_2)$, wobei beide Punkte in $\bar{J}$ liegen sollen. Dann gilt mit $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{F}(x_1; \mathfrak{Y}_1 + g_1 \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}_1'$ und $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{F}(x_2; \mathfrak{Y}_2 + g_2 \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{Y}_2'$ nach Satz 17 (3) die Abschätzung:

$$\begin{cases} |\overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*) - \overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*)| \leq C \cdot |\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1| \\ \qquad\qquad \leq C \cdot |\mathfrak{F}(x_2; \mathfrak{Y}_2 + g_2 \cdot \mathfrak{z}^*) - \mathfrak{F}(x_1; \mathfrak{Y}_1 + g_1 \cdot \mathfrak{z}^*)| + C \cdot |\mathfrak{Y}_2' - \mathfrak{Y}_1'|. \end{cases} \tag{12}$$

Diese Abschätzung gilt für jedes feste $\mathfrak{z}^*$ mit $p(\mathfrak{z}^*) = 1$. Wir erklären nun in der Punktmenge $\bar{J}$ eine Metrik durch die Gleichung:

$$|S_2 - S_1| = |x_2 - x_1| + |\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{Y}_1| + \frac{1}{\underline{P}} \cdot |g_2 - g_1| + |\mathfrak{Y}_2' - \mathfrak{Y}_1'| \tag{13}$$

mit der Zahl $\underline{P}$ von Satz 16. Man erkennt sofort, daß der Reziprokwert dieser Zahl gleich dem Maximalwert des Betrages von $\mathfrak{z}^*$ unter der Nebenbedingung $p(\mathfrak{z}^*) = 1$ ist. Liegt also S_2 hinreichend nahe an S_1, so daß $|S_2 - S_1| \leq \delta$ ist, so liegen auch die Punkte $\mathfrak{x}_2 = (x_2, \mathfrak{v}_2)$ mit $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{Y}_2 + g_2 \cdot \mathfrak{z}^*$ gleichmäßig für alle $\mathfrak{z}^*$ mit jeweils demselben $\mathfrak{z}^*$ so nahe an den Punkten $\mathfrak{x}_1 = (x_1; \mathfrak{v}_1)$ mit $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{Y}_1 + g_1 \cdot \mathfrak{z}^*$, daß $|\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1| \leq \delta$ ist. Ist δ hinreichend klein, so gehören die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ alle einer abgeschlossenen Teilmenge von G an, in der auf Grund der vorausgesetzten Stetigkeit von $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{v})$ diese Funktion gleichmäßig stetig ist. Es gibt also zu jedem vorgegebenen ε eine Zahl $\delta(\varepsilon)$, derart daß der erste Term der Schranke unter (12) gleichmäßig für alle $\mathfrak{z}^*$ nicht größer als $\varepsilon/2$ ist. Hierbei kann man gleichzeitig erreichen, daß auch der zweite Term unter (12) unter derselben Schranke liegt. Man braucht ja nur δ so klein zu wählen, daß $2C \cdot \delta \leq \varepsilon$ ist. Es gibt also unabhängig von $\mathfrak{z}^*$ zu jedem ε ein $\delta(\varepsilon)$, so daß

$$|\overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*) - \overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*)| \leq \varepsilon \tag{14}$$

ist, wenn nur $|S_2 - S_1| \leq \delta(\varepsilon)$ ist, wobei die Zahl $\delta(\varepsilon)$ außerdem noch von S abhängen wird. Wir halten nun die Punkte S_1 und S_2 beide fest und erhalten die Abschätzung:

$$\begin{cases} \overline{H}(S_1) = \overline{\text{fin}}\, \overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*) = \overline{\text{fin}}\, (\overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*) + (\overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*) - \overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*))) \\ \qquad\qquad \leq \overline{\text{fin}}\, \overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*) + \overline{\text{fin}}\, (\overline{D}(S_1, \mathfrak{z}^*) - \overline{D}(S_2, \mathfrak{z}^*)) \leq \overline{H}(S_2) + \varepsilon. \end{cases} \tag{15}$$

Eine entsprechende Abschätzung gilt nach Vertauschung der Punkte S_1 mit S_2. Wir erhalten danach die Abschätzung: $|\bar{H}(S_2) - \bar{H}(S_1) \leq \varepsilon$ für festen Punkt S_1 und alle Punkte S_2 mit $|S_2 - S_1| \leq \delta(\varepsilon)$. Damit ist der Satz 23 vollständig bewiesen.

Eine besondere Beachtung verdient die Hüllfunktion $H(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'; g)$ für den Fall, daß $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ gesetzt wird. Man erkennt sofort, daß dann die Hüllfunktion $H(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}); g)$ mit der ergänzten Hüllfunktion

$$\bar{H}(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}); g)$$

vollständig übereinstimmt, da beide Funktionen für $g = 0$ den Wert Null haben. Man erkennt dies sofort, wenn man die entsprechenden Ausdrücke D und $\bar{D}$ betrachtet, die beide ($\bar{D}$ unabhängig von $\mathfrak{z}^*$) den Wert Null haben. Der Ausdruck

$$D(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}); \mathfrak{z}) = [(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y} + \mathfrak{z}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})) \triangledown p](\mathfrak{z}) \tag{16}$$

hat die typische Form eines Lipschitz-Ausdruckes. Setzt man etwa speziell $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}|$, so ist nämlich

$$[(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y} + \mathfrak{z}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})) \triangledown p](\mathfrak{z}) = (\mathfrak{z}^0 \cdot (\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y} + \mathfrak{z}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}))), \tag{17}$$

wobei $\mathfrak{z}^0$ der dem Vektor $\mathfrak{z}$ gleichgerichtete Einheitsvektor ist. Wir wollen deshalb den Ausdruck (16) den zur Funktion $p(\mathfrak{z})$ gehörenden Lipschitz-*Ausdruck* nennen. Entsprechend wollen wir die obere Grenze dieses Ausdruckes unter der Nebenbedingung $p(\mathfrak{z}) = g$:

$$L(x; \mathfrak{y}, g) = \overline{\text{fin}}\,[(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y} + \mathfrak{z}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})) \triangledown p](\mathfrak{z}) \tag{18}$$

die zur Funktion $p(\mathfrak{z})$ gehörende Lipschitz-*Grenze* nennen. Sie ist für alle Punkte $(x; \mathfrak{y})$ aus G und alle Werte von g mit der Einschränkung: $0 \leq g < \bar{g}(x; \mathfrak{y})$ (vgl. Satz 22) definiert und stetig. Aus ihrer Eigenschaft als obere Grenze des Lipschitz-Ausdruckes (16) für $p(\mathfrak{z}) = g$ folgt unmittelbar die Lipschitz-*Bedingung*:

$$[(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y} + \mathfrak{z}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})) \triangledown p](\mathfrak{z}) \leq L(x; \mathfrak{y}, p(\mathfrak{z})), \tag{19}$$

die für $p(\mathfrak{z}) < \bar{g}(x; \mathfrak{y})$ stets erfüllt ist. Daß $L(x; \mathfrak{y}, p(\mathfrak{z}))$ gleichzeitig die kleinstmögliche Lipschitz-*Schranke* von der Form $M(x; \mathfrak{y}, p(\mathfrak{z}))$ für $p(\mathfrak{z}) < \bar{g}(x; \mathfrak{y})$ ist, folgt auch aus ihrer Eigenschaft als obere Grenze. Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der Lipschitz-Grenze ergibt sich aus dem folgenden

Satz 24. *Die Hüllfunktion $H(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'; g)$ genügt der Abschätzung*

$$H(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'; g) \leq L(x; \mathfrak{y}, g) + C \cdot |\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'|, \tag{20}$$

und wenn $p(\mathfrak{z})$ konvex ist, sogar der Abschätzung

$$H(x; \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'; g) \leq L(x; \mathfrak{y}, g) + p(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}) - \mathfrak{y}'). \tag{21}$$

Beweis. Aus Satz 17 folgt mit beliebigen Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ die Abschätzung:

$$[\mathfrak{v}_1 \triangledown p](\mathfrak{z}) \leq [\mathfrak{v}_2 \triangledown p](\mathfrak{z}) + C \cdot |\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2|$$

bzw. die Abschätzung:

$$[\mathfrak{v}_1 \triangledown \mathfrak{p}]\,(\mathfrak{z}) \leqq [\mathfrak{v}_2 \triangledown \mathfrak{p}]\,(\mathfrak{z}) + \mathfrak{p}\,(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)\,.$$

Daraus ergibt sich sofort die Abschätzung:

$$D\,(x;\,\mathfrak{Y},\,\mathfrak{Y}';\,\mathfrak{z}) \leqq D\big(x;\,\mathfrak{Y},\,\mathfrak{F}\,(x;\,\mathfrak{Y});\,\mathfrak{z}\big) + C \cdot |\,\mathfrak{F}\,(x;\,\mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\,| \tag{22}$$

bzw. die Abschätzung:

$$D\,(x;\,\mathfrak{Y},\,\mathfrak{Y}';\,\mathfrak{z}) \leqq D\,\big(x;\,\mathfrak{Y},\,\mathfrak{F}\,(x;\,\mathfrak{Y});\,\mathfrak{z}\big) + \mathfrak{p}\,\big(\mathfrak{F}\,(x;\,\mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}'\big)\,. \tag{22a}$$

Beim Übergang zu den oberen Grenzen $H = \overline{\text{fin}}\, D\,(x;\,\mathfrak{Y},\,\mathfrak{Y}';\,\mathfrak{z})$ und $L = \overline{\text{fin}}\, D\big(x;\,\mathfrak{Y},\,\mathfrak{F}\,(x;\,\mathfrak{Y});\,\mathfrak{z}\big)$ erhält man schließlich die Abschätzungen von Satz 24.

Als Folge des Satzes 21 gilt nun der

Satz 25. *Hinreichend dafür, daß der spezielle Röhrenbereich* $R\big(\mathfrak{Y}(x);\,\mathfrak{p}(\mathfrak{z}),\,g\,(x)\big)$ *für* $a \leqq x \leqq b$ *ein einschließender Röhrenbereich ist, ist das Bestehen der Ungleichung*:

$$g'_+\,(x) > H\big(x;\,\mathfrak{Y}\,(x),\,\mathfrak{Y}'_+\,(x);\,g\,(x)\big) \quad \text{für} \quad a \leqq x < b\,. \tag{23}$$

Notwendig dafür ist aber das Bestehen der Ungleichung:

$$g'_+\,(x) \geqq H\big(x;\,\mathfrak{Y}\,(x),\,\mathfrak{Y}'_+\,(x);\,g\,(x)\big) \quad \textit{für} \quad a \leqq x < b\,. \tag{24}$$

7. Existenz von einschließenden Röhrenbereichen. Wir betrachten die Differentialungleichung:

$$g'_+ > L^*\,(x;\,g) + r\,(x) \tag{1}$$

mit $L^*(x;\,g) = L\big(x;\,\mathfrak{Y}\,(x),\,g\big)$ und $r\,(x) = C \cdot |\,\mathfrak{F}\,\big(x;\,\mathfrak{Y}\,(x)\big) - \mathfrak{Y}'_+\,(x)|$ bzw. mit $r\,(x) = \mathfrak{p}\big(\mathfrak{F}\,(x;\,\mathfrak{Y}\,(x)) - \mathfrak{Y}'_+\,(x)\big)$ in dem Bereich G^* der $(x;\,g)$-Ebene, der durch die Ungleichungen $a \leqq x \leqq b$ und $0 \leqq g < \bar{g}\,\big(x;\,\mathfrak{Y}\,(x)\big)$ bestimmt ist. In diesem Bereich ist $L^*(x;\,g)$ stetig und $r\,(x)$ gleichmäßig beschränkt. Die gleichmäßige Beschränktheit von $r\,(x)$ folgt insbesondere aus der Stetigkeit von $\mathfrak{F}\big(x;\,\mathfrak{Y}\,(x)\big)$ und der LIPSCHITZ-Bedingung für $\mathfrak{Y}\,(x)$ [§ 4, 1.(2)], welche die gleichmäßige Beschränktheit von $\mathfrak{Y}'_+\,(x)$ bedingt. Somit existiert sicher eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $\bar{r}\,(x)$, so daß durchweg die Abschätzung: $r\,(x) < \bar{r}\,(x)$ gilt. Dann betrachten wir die Differentialgleichung:

$$g' = L^*\,(x;\,g) + \bar{r}\,(x)\,. \tag{2}$$

Diese besitzt als Differentialgleichung mit stetiger rechter Seite (vgl. Satz 1) zu jedem Anfangswert $g\,(a)$, welcher der Ungleichung: $0 \leqq g\,(a) < \bar{g}\,\big(a;\,\mathfrak{Y}\,(a)\big)$ genügt, mindestens eine Lösung $g\,(x)$, die mindestens in einem gewissen Intervall: $a \leqq x \leqq b'$ mit $a < b' \leqq b$ existiert, wobei allerdings noch zu beachten ist, daß die Intervallgrenze b' von dem Anfangswert $g\,(a)$ abhängen kann. Diese Funktion $g\,(x)$ erfüllt im Intervall $a \leqq x < b'$ die Differentialungleichung (1) und genügt im Intervall $a \leqq x \leqq b'$ auch einer LIPSCHITZ-Bedingung [§ 4, 1.(8)], da die rechte Seite der Differentialgleichung (2) mit $g = g\,(x)$ in diesem Intervall auch gleichmäßig beschränkt ist. Wir erhalten somit unter Beachtung der Sätze 24 und 25 den

Satz 26. *Genügen die Funktionen $\mathfrak{Y}(x)$ und $p(\mathfrak{z})$ den Bedingungen unter* § 4, 1, *wobei $\mathfrak{Y}(x)$ in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$ definiert sein möge, so gibt es zu jedem Anfangswert $g(a)$ mit $0 \leqq g(a) < \bar{g}(a; \mathfrak{Y}(a))$ in einem eventuell kleineren Intervall $a \leqq x \leqq b'$ eine ebenfalls den Bedingungen unter* § 4, 1 *genügende Funktion $g(x)$, derart, daß der spezielle Röhrenbereich $R(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x))$ für $a \leqq x \leqq b'$ ein einschließender Röhrenbereich ist.*

Weitere Aussagen können gemacht werden, falls vorausgesetzt werden darf, daß die Funktion $r(x)$ von (1) selber stetig ist. Wir machen die

Zusatzvoraussetzung: Die Funktion $\mathfrak{Y}(x)$ ist im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig differenzierbar.

Wir betrachten jetzt für beliebige Werte von $\varepsilon > 0$ die Differentialgleichungen

$$g' = L^*(x; g) + r(x) + \varepsilon. \tag{3}$$

Jede Lösung einer der Differentialgleichungen (3) mit ein und demselben Anfangswert $g(a) > \bar{g}(a; \mathfrak{Y}(a))$ genügt, soweit sie existiert, der Differentialungleichung (1). Die untere Grenze all dieser Lösungen $g(x, \varepsilon)$ ist (s. Kamke [3], S. 78—86) die sog. *Maximallösung* der Differentialgleichung: $g' = L^*(x; g) + r(x)$ mit dem Anfangswert $g(a)$. Existiert diese Maximallösung $g^*(x)$ in einem rechts offenen Intervall: $a \leqq x < b'$, und ist das Intervall: $a \leqq x \leqq b''$ ein abgeschlossenes Teilintervall, so existieren für hinreichend kleine Werte von ε auch die Lösungen $g(x, \varepsilon)$ in diesem Intervall $a \leqq x \leqq b''$. Wir betrachten jetzt die Menge von einschließenden Röhrenbereichen: $E(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g(x, \varepsilon))$ für $a \leqq x \leqq b''$. Der Durchschnitt dieser Menge von einschließenden Röhrenbereichen ist offenbar der Röhrenbereich $R(\mathfrak{Y}(x); p(\mathfrak{z}), g^*(x))$ für $a \leqq x \leqq b''$. Wir haben also einen Sachverhalt, welcher den Voraussetzungen des Satzes 11 entspricht. Es kann also schließlich der folgende Satz ausgesprochen werden:

Satz 27. *Es sei $\mathfrak{Y}(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$, so daß die Kurve $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{Y}(x))$ ganz in G liegt. $p(\mathfrak{z})$ genüge den Bedingungen von* § 4, 1. *Ferner sei $g^*(x)$ die Maximallösung der Differentialgleichung $g' = L(x; \mathfrak{Y}(x), g) + r(x)$ mit $r(x) = C \cdot |\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x)) - \mathfrak{Y}'(x)|$ bzw. $r(x) = p(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x)) - \mathfrak{Y}'(x))$ und dem Anfangswert $g^*(a) = g(a) < \bar{g}(a; \mathfrak{Y}(a))$, welche in einem Intervall $a \leqq x < b'$ mit $b' \leqq b$ existieren möge. (Die Funktion $L(x; \mathfrak{Y}(x) g)$, ist durch die Gleichung* [§ 4, 6.(18)] *definiert.) Ist nun $\mathfrak{y}(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ mit dem Anfangswert $\mathfrak{y}(a)$, welcher der Abschätzung $p(\mathfrak{y}(a) - \mathfrak{Y}(a)) \leqq g(a)$ genügt, so genügt $\mathfrak{y}(x)$ für $a \leqq x < b'$ der Abschätzung: $p(\mathfrak{y}(x) - \mathfrak{Y}(x)) \leqq g^*(x)$.*

Hiermit ist der theoretische Teil dieser Arbeit abgeschlossen. Die Aussage des Satzes 27 bleibt natürlich auch dann richtig, wenn man an Stelle der Maximallösung der Differentialgleichung $g' = L(x; \mathfrak{Y}(x), g) + r(x)$ eine Majorante $g(x) \geqq g^*(x)$ einsetzt. Diese kann wiederum dadurch gewonnen werden, daß man an Stelle der Lipschitz-Grenze $L(x; \mathfrak{Y}, g)$ eine leichter zu bestimmende Lipschitz-Schranke $M(x; \mathfrak{Y}, g) \geqq L(x; \mathfrak{Y}, g)$ verwendet. Ebenso darf man auch für die Funktion $r(x)$ eine Majorante $\bar{r}(x) \geqq r(x)$ einsetzen. Durch

Abschätzung der Lösungen der Differentialgleichung $g' = M(x; \mathfrak{Y}(x), g) + \bar{r}$ kommt man dann auch zu einer Majorante $g(x) \geqq g^*(x)$. Somit ist eine Fehlerabschätzung für eine Näherungslösung $\mathfrak{Y}(x)$ der Differentialgleichung $\mathfrak{y}' = \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ mit gewissen Einschränkungen immer möglich. Diese Einschränkungen sind jedoch ausschließlich auf die notwendig zu machende Einschränkung: $g < \bar{g}(x; \mathfrak{Y})$ zurückzuführen, die z. B. ganz entfällt, wenn $\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y})$ im ganzen $(x; \mathfrak{y})$-Raum stetig ist.

§ 5. Anwendungen.

1. Beispiele für Funktionen $p(\mathfrak{z})$. Wir betrachten zwei Beispiele.

Erstes Beispiel. Die Funktion $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}|$ erfüllt die Bedingungen von § 4, 1. Sie ist positiv für $\mathfrak{z} \neq 0$ und stetig für alle Vektoren $\mathfrak{z}$, erfüllt also die dortige Bedingung (3). Mit $h \geqq 0$ ist $|h \cdot \mathfrak{z}| = h \cdot |\mathfrak{z}|$; es gilt also auch (4). Es gilt ferner die Dreiecksungleichung: $||\mathfrak{z}_1| - |\mathfrak{z}_2|| \leqq |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|$. Damit erfüllt diese Funktion sowohl die LIPSCHITZ-Bedingung (5) mit $C = 1$ als auch die Bedingung (5a). $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}|$ ist also auch konvex in dem dort geschilderten Sinne. Für die $\mathfrak{v}$-Ableitung erhalten wir, im Falle daß $\mathfrak{z} \neq 0$ ist, den Ausdruck:

$$(1) \qquad [\mathfrak{v} \triangledown p](\mathfrak{z}) = \mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} |\mathfrak{z}| = (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{z}^0) \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{z}^0 = \frac{1}{|\mathfrak{z}|} \cdot \mathfrak{z},$$

und im Falle daß $\mathfrak{z} = 0$ ist, den Ausdruck:

$$(2) \qquad [\mathfrak{v} \triangledown p](0) = p(\mathfrak{v}) = |\mathfrak{v}|.$$

Zweites Beispiel. Die Funktion $p(\mathfrak{z}) = \operatorname{Max}_{(i)} |z_i|$ erfüllt auch die Bedingungen von § 4, 1. Sie ist positiv, wenn nicht alle z_i für $i = 1, 2, \ldots, n$ verschwinden. Ferner ist für $h \geqq 0$:

$$(3) \qquad \operatorname{Max}_{(i)} |h \cdot z_i| = \operatorname{Max}_{(i)} h \cdot |z_i| = h \cdot \operatorname{Max}_{(i)} |z_i|.$$

Damit sind die Bedingungen (3) und (4) von § 4, 1 bis auf die Stetigkeit von $p(\mathfrak{z})$ erfüllt. Die Stetigkeit folgt aber aus der LIPSCHITZ-Bedingung (5), deren Gültigkeit wir jetzt beweisen wollen. Sind $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ zwei Vektoren mit den Komponenten

$$\mathfrak{z}_1 = (z_{11}, z_{21}, z_{31}, \ldots, z_{n1}) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{z}_2 = (z_{12}, z_{22}, z_{32}, \ldots, z_{n2}),$$

so gilt stets die Abschätzung:

$$(4) \qquad \operatorname{Max}_{(i)} |z_{i2}| \leqq \operatorname{Max}_{(i)} |z_{i1}| + \operatorname{Max}_{(i)} (|z_{i2}| - |z_{i1}|) \leqq \operatorname{Max}_{(i)} |z_{i1}| + \operatorname{Max}_{(i)} |z_{i2} - z_{i1}|.$$

Hieraus folgt sofort die Bedingung (5a) und gleichzeitig wegen der auch stets geltenden Abschätzung: $\operatorname{Max} |z_{i2} - z_{i1}| \leqq |\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1|$ die LIPSCHITZ-Bedingung (5). Wir brauchen nun nur noch die Ableitung der Funktion $p(\mathfrak{z})$ entsprechend der Definition (6) zu berechnen. Es handelt sich hier um den Grenzwert:

$$(5) \qquad [\mathfrak{v} \triangledown p](\mathfrak{z}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\operatorname{Max}_{(i)} |z_i + t \cdot v_i| - \operatorname{Max}_{(i)} |z_i| \right).$$

Hierbei sind die Vektoren $\mathfrak{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ und $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ fest und t geht mit positiven Werten nach Null. Wir wollen zunächst annehmen, daß

nicht alle z_i verschwinden. Nun wollen wir unterscheiden zwischen den Indizes $i=i'$, für die der Betrag von $z_{i'}$ gleich dem Maximum der Beträge aller z_i ist, und den übrigen Indizes $i=i''$, für die die Beträge von $z_{i''}$ kleiner als dieses Maximum sind. Da die Zahlen: $z_i+t\,v_i$ mit fallenden Werten von t gegen die entsprechenden Zahlen z_i konvergieren, so sind für hinreichend kleine Werte von t die Beträge der Zahlen: $z_{i'}+t\,v_{i'}$ sämtlich größer als die Zahlen: $|z_{i''}+tv_{i''}|$. Es ist dann also:

$$(6)\qquad \operatorname*{Max}_{(i)}|z_i+tv_i| = \operatorname*{Max}_{(i')}|z_i+tv_i| \quad \text{entsprechend} \quad \operatorname*{Max}_{(i')}|z_i| = \operatorname*{Max}_{(i)}|z_i|.$$

Dann sind aber auch die Vorzeichen der Zahlen: $z_{i'}+tv_{i'}$ gleich den Vorzeichen der entsprechenden Zahlen $z_{i'}$. Daraus folgt:

$$(7)\qquad |z_{i'}+tv_{i'}| = (z_{i'}+tv_{i'})\cdot\operatorname{sgn}(z_{i'}) = |z_{i'}|+t\cdot v_{i'}\cdot\operatorname{sgn}(z_{i'}).$$

Wir bekommen damit die Gleichung:

$$(8)\qquad \operatorname*{Max}_{(i')}|z_i+tv_i| = \operatorname*{Max}_{(i')}|z_i| + t\cdot\operatorname*{Max}_{(i')}\left(v_i\cdot\operatorname{sgn}(z_i)\right),$$

da ja in Wirklichkeit alle $z_{i'}$ dem Betrage nach gleich sind. Entsprechend der Gl. (5) ist bei Berücksichtigung von (6)

$$(9)\qquad [\mathfrak{v}\bigtriangledown\mathfrak{p}](\mathfrak{z}) = \operatorname*{Max}_{(i')}\left(v_i\cdot\operatorname{sgn}(z_i)\right) \qquad \text{für} \qquad \mathfrak{z}\neq 0.$$

Für $\mathfrak{z}=0$ ist analog zu (2):

$$[\mathfrak{v}\bigtriangledown\mathfrak{p}](0) = \mathfrak{p}(\mathfrak{v}) = \operatorname*{Max}_{(i)}|v_i|.$$

2. Lipschitzbedingungen. Für die Abschätzung der Lipschitz-Grenze

$$(1)\qquad L^*(x;g) = L\big(x;\mathfrak{Y}(x),g)\big) = \overline{\operatorname{fin}}\left[\left(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x)+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x))\right)\bigtriangledown\mathfrak{p}\right](\mathfrak{z})$$

für $\mathfrak{p}(\mathfrak{z})=g$ ist notwendig eine Lipschitz-Schranke $M(x;g)=M^*\big(x;\mathfrak{Y}(x),g\big)$ zu bestimmen, so daß die Lipschitz-Bedingung

$$(2)\qquad \left[\left(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x)+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}(x))\right)\bigtriangledown\mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}) \leqq M^*\big(x;\mathfrak{p}(\mathfrak{z})\big)$$

erfüllt ist. Da bei dieser Bedingung eine spezielle Funktion $\mathfrak{Y}(x)$ verwendet wird, soll sie eine *spezielle* Lipschitz-*Bedingung* genannt werden. Entsprechend soll die Funktion $M^*(x;g)$ eine *spezielle* Lipschitz-*Schranke* heißen. Betrachtet man daneben die *allgemeine* Lipschitz-*Bedingung*:

$$(3)\qquad \left[\left(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y}+\mathfrak{z})-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{Y})\right)\bigtriangledown\mathfrak{p}\right](\mathfrak{z}) \leqq M\big(x;\mathfrak{Y},\mathfrak{p}(\mathfrak{z})\big)$$

mit einer *allgemeinen* Lipschitz-*Schranke* $M(x;\mathfrak{Y},g)$, so ist offenbar $M\big(x;\mathfrak{Y}(x)\big)=M^*(x;g)$ eine spezielle Lipschitz-Schranke. Soweit $g<\bar{g}(x;\mathfrak{Y})$ bzw. $g<\bar{g}\big(x;\mathfrak{Y}(x)\big)$ bleibt, sind die Lipschitz-Grenzen $L(x;\mathfrak{Y},g)$ bzw. $L^*(x;g)=L\big(x;\mathfrak{Y}(x),g\big)$ die kleinstmöglichen Lipschitz-Schranken, was aus ihrer Eigenschaft als obere Grenzen folgt. — Eine andere Möglichkeit, spezielle Lipschitz-Schranken zu bestimmen, ist die folgende: Es sei B ein zusammenhängender Teilbereich von G. Wir bestimmen eine Funktion $\overline{M}(x;g)$ so, daß die Lipschitz-Bedingung:

$$(4)\qquad \left[\left(\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}_1)-\mathfrak{F}(x;\mathfrak{y}_2)\right)\bigtriangledown\mathfrak{p}\right](\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2) \leqq \overline{M}\left(x;\mathfrak{p}(\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2)\right)$$

für alle Punkte $\mathfrak{x}_1 = (x; \mathfrak{y}_1)$ und $\mathfrak{x}_2 = (x; \mathfrak{y}_2)$ bei jeweils festem x erfüllt ist, sofern die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ beide in B liegen. Mit $\mathfrak{x}_1 = (x; \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z})$ und $\mathfrak{x}_2 = (x; \mathfrak{Y}(x))$ gilt dann auch die LIPSCHITZ-Bedingung

$$(5) \qquad [(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x))) \nabla p](\mathfrak{z}) \leq \overline{M}(x; p(\mathfrak{z})),$$

falls $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ beide in B liegen. Es ist also $\overline{M}(x; g) = M^*(x; g)$ eine spezielle LIPSCHITZ-Schranke, wenn für festes x also auch festes $\mathfrak{Y}(x)$ alle Punkte $\mathfrak{x}_1$ in B liegen, für die $p(\mathfrak{z}) = g$ ist. Ist dies für $g < \overline{\beta}(x; \mathfrak{Y}(x))$ der Fall, so kann die Funktion $\overline{M}(x; g)$, die wir eine *gleichmäßige* LIPSCHITZ-*Schranke* für den Bereich B nennen wollen, für $g < \overline{\beta}(x; \mathfrak{Y}(x))$ für jede ganz in B verlaufende Kurve $\mathfrak{x} = (x; \mathfrak{Y}(x))$ als spezielle LIPSCHITZ-Schranke verwendet werden.

3. Spezielle Beispiele.

a) Bestimmung der LIPSCHITZ-*Grenze mit* $p(\mathfrak{z}) = \operatorname{Max}|z_i|$. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem:

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Zu berechnen ist die LIPSCHITZ-Grenze:

$$(2) \qquad L(x; \mathfrak{Y}, g) = \overline{\operatorname{fin}}\,[(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y} + \mathfrak{z}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y})) \nabla p](\mathfrak{z})$$

unter der Nebenbedingung: $p(\mathfrak{z}) = \operatorname{Max}_{(i)} |z_i| = g$. Unter dieser Bedingung bilden die Punkte

$$(3) \qquad (x; Y_1 + z_1, Y_2 + z_2, \ldots, Y_n + z_n) = (x; \mathfrak{Y} + \mathfrak{z})$$

bei festem x und festen Werten Y_i den vollen Rand eines n-dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge $2g$. Der Rand dieses Würfels setzt sich aus $2n$ $(n-1)$-dimensionalen Würfeln zusammen, welche durch die Bedingungen

$$(4) \qquad \begin{cases} z_i = g, & z_j \leq g \quad \text{für} \quad j \neq i \\ z_i = -g, & z_j \leq g \quad \text{für} \quad j \neq i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt sind. Hierbei kommen die Punkte, bei denen mindestens zwei $\mathfrak{z}$-Komponenten den gleichen Betrag haben, mehrfach vor. Wir setzen nun $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ mit

$$(5) \qquad v_i = f_i(x; Y_1 + z_1, Y_2 + z_2, \ldots, Y_n + z_n) - f_i(x; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

und bilden für jeweils eine der Punktmengen, welche durch die Bedingungen:

$$(6) \qquad z_i = g, \quad z_j < g \quad \text{für} \quad j \neq i \quad \text{bzw.} \quad z_i = -g, \quad z_j < g \quad \text{für} \quad j \neq i$$

bestimmt sind, die $\mathfrak{v}$-Ableitung nach § 5, 1.(9):

$$(7) \qquad [\mathfrak{v} \nabla p](\mathfrak{z}) = \operatorname{sgn}(z_i) \cdot v_i = V_i^+ \quad \text{bzw.} \quad = V_i^-$$

mit

$$(8) \qquad \begin{cases} V_i^+ = +(f_i(x; Y_1 + z_1, \ldots, Y_i + g, \ldots, Y_n + z_n) - f_i(x; Y_1, \ldots, Y_n)) \quad \text{bzw.} \\ V_i^- = -(f_i(x; Y_1 + z_1, \ldots, Y_i - g, \ldots, Y_n + z_n) - f_i(x; Y_1, \ldots, Y_n)). \end{cases}$$

Jeder dieser Ausdrücke ist in der ihm entsprechenden Punktmenge der abgeschlossenen Würfel (4) eine stetige Funktion der noch beweglichen $\mathfrak{z}$-Kom-

ponenten. Jeder dieser Ausdrücke besitzt also in dem ihm entsprechenden abgeschlossenen Würfel ein Maximum:

$$\overline{V}_i^+ = \operatorname{Max} V_i^+ \quad \text{bzw.} \quad \overline{V}_i^- = \operatorname{Max} V_i^- \tag{9}$$

unter der Nebenbedingung: $|z_j| \leqq g$ für $j \neq i$, das dann auch gleich der oberen Grenze in dem offenen Würfel (6) unter derselben Bedingung ist. Gleichzeitig werden damit aber auch die $\mathfrak{v}$-Ableitungen an den Stellen mit erfaßt, die durch die Bedingungen (6) ausgeschlossen werden. An jeder von diesen Stellen ist nämlich nach § 5, 1.(9) die $\mathfrak{v}$-Ableitung gleich mindestens einem der $2n$ Ausdrücke V_i^+ bzw. V_i^-. Somit erhalten wir für die zu bestimmende LIPSCHITZ-Grenze (2) das Ergebnis:

$$L(x; \mathfrak{Y}, g) = \operatorname{Max}(\overline{V}_1^+, \overline{V}_2^+, \ldots, \overline{V}_n^+; \overline{V}_1^-, \overline{V}_2^-, \ldots, \overline{V}_n^-). \tag{10}$$

Beispiel. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem:

$$y_1' = -x \cdot y_1 + y_2, \quad y_2' = -x^2 \cdot y_2 + y_1.$$

Für den Vektor $\mathfrak{v} = (v_1, v_2)$ erhalten wir die Komponenten:

$$v_1 = -x \cdot (Y_1 + z_1) + Y_2 + z_2 + x \cdot Y_1 - Y_2 = -x \cdot z_1 + z_2$$
$$v_2 = -x^2 (Y_2 + z_2) + Y_1 + z_1 + x^2 \cdot Y_2 - Y_1 = -x^2 \cdot z^2 + z_1.$$

Für die Ausdrücke V_i^+ bzw. V_i^- erhalten wir entsprechend:

$$V_1^+ = -x \cdot g + z_2, \quad V_1^- = -x \cdot g - z_2$$
$$V_2^+ = -x^2 \cdot g + z_1, \quad V_2^- = -x^2 \cdot g - z_1.$$

Für die Maxima dieser Ausdrücke erhalten wir die Ausdrücke:

$$\overline{V}_1^+ = g \cdot (1 - x), \quad \overline{V}_1^- = g \cdot (1 - x), \quad \overline{V}_2^+ = g \cdot (1 - x^2), \quad \overline{V}_2^- = g \cdot (1 - x^2).$$

Damit bestimmt sich die LIPSCHITZ-Grenze zu:

$$L(x; g) = g \cdot \operatorname{Max}\left((1 - x); (1 - x^2)\right)$$

oder ausführlicher:

$$L = g \cdot (1 - x) \quad \text{für} \quad x \leqq 0,$$
$$L = g \cdot (1 - x^2) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1,$$
$$L = g \cdot (1 - x) \quad \text{für} \quad x \geqq 1.$$

Man erkennt, daß die LIPSCHITZ-Grenze für $x > 1$ negativ ist.

b) Bestimmung einer gleichmäßigen LIPSCHITZ-*Schranke mit* $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}|$. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem:

$$y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

in einem abgeschlossenen Bereich B, der so beschaffen sein soll, daß für festes x der jeweilige Durchschnitt von B mit der Hyperebene $x = \text{const}$ eine konvexe Punktmenge ist. Wir wollen weiter voraussetzen, daß die rechten Seiten der

Differentialgleichungen (1) stetige partielle Ableitungen

$$(2) \qquad f_{ik}(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x; y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

besitzen, wobei jedoch nicht erforderlich ist, daß die f_{ik} auch stetig von x abhängen. Die zu $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}| = |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2|$ gehörende gleichmäßige LIPSCHITZ-Bedingung nach § 5, 2.(4) lautet dann:

$$(3) \qquad \left((\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2)^0 \cdot (\mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}_1) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{y}_2))\right) \leq \overline{M}\left(x; |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2|\right)$$

für alle $(x; \mathfrak{y}_1)$ und $(x; \mathfrak{y}_2)$ aus B. Mit den Bezeichnungen $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{Y} + \mathfrak{z}$ und nach Multiplikation mit $|\mathfrak{z}|$ lautet sie ausführlicher:

$$(4) \qquad \sum z_i \cdot \left(f_i(x; Y_1 + z_1, \ldots, Y_n + z_n) - f_i(x; Y_1, \ldots, Y_n)\right) \leq \overline{M}(x; |\mathfrak{z}|).$$

Wir betrachten nun die Funktion von t:

$$(5) \qquad Q(t) = \sum z_i \cdot \left(f_i(x; Y_1 + t z_1, \ldots, Y_n + t z_n) - f_i(x; Y_1, \ldots, Y_n)\right).$$

Diese hat für $t = 0$ den Wert Null und für $t = 1$ den Wert der linken Seite von (4). Nach dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es dann einen Wert von t aus dem Intervall: $0 < t < 1$, derart daß $Q(1) = Q'(t)$ ist. Unter Verwendung der partiellen Ableitungen (2) und mit der Abkürzung $\mathfrak{Y} + t\,\mathfrak{z} = \overline{\mathfrak{y}}$ erhalten wir demnach die Gleichung:

$$(6) \qquad \sum z_i \cdot \left(f_i(x; y_1, \ldots, y_n) - f_i(x; Y_1, \ldots, Y_n)\right) = \sum \sum z_i \cdot f_{ik}(x; \overline{\mathfrak{y}}) \cdot z_k.$$

Die Zwischenstelle $(x; \overline{\mathfrak{y}})$, an der die f_{ik} zu nehmen sind, liegt sicher in B, da B für jedes feste x als konvex vorausgesetzt war. Nach einem bekannten Satz über quadratische Formen gilt nun stets die Abschätzung:

$$(7) \qquad \sum \sum z_i \cdot f_{ik} \cdot z_k \leq \bar{\lambda}(x; \overline{\mathfrak{y}}) \cdot \sum (z_i)^2 = \bar{\lambda}(x; \overline{\mathfrak{y}}) \cdot (\mathfrak{z})^2,$$

wobei $\bar{\lambda}(x; \overline{\mathfrak{y}})$ der größte Eigenwert der Matrix

$$(8) \qquad A = (a_{ik}) \quad \text{mit} \quad a_{ik} = \tfrac{1}{2}\left(f_{ik}(x; \overline{\mathfrak{y}}) + f_{ik}(x; \overline{\mathfrak{y}})\right)$$

ist. Da die Elemente der Matrix A als Funktionen von $\overline{\mathfrak{y}}$ bei festem x in B gleichmäßig stetig sind, so existiert für jedes feste x sicher ein Maximum von $\bar{\lambda}(x; \overline{\mathfrak{y}})$, das wir mit $M(x)$ bezeichnen. Damit ist, wie man durch Vergleich mit (4) leicht feststellen kann,

$$(9) \qquad \overline{M}(x; |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2|) = M(x) \cdot |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2|$$

eine gleichmäßige LIPSCHITZ-Schranke für den Bereich B.

Hiermit kann unter den obigen Voraussetzungen die Bestimmung einer LIPSCHITZ-Schranke auf die Bestimmung einer oberen Schranke für die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A zurückgeführt werden, wobei aber bemerkt werden muß, daß diese obere Schranke keineswegs auch eine obere Schranke für die Absolutbeträge der Eigenwerte sein muß. Für eine negativ-definite Matrix A darf man z.B. stets die Zahl Null als obere Eigenwert-

schranke benutzen. Bekannte Absolutwertabschätzungen sind:

$$(10) \qquad |\lambda| \leq \sqrt{\sum\sum (a_{ik})^2} \quad \text{und} \quad |\lambda| \leq \operatorname*{Max}_{(i)} \sum_{(k)} |a_{ik}|,$$

aus denen natürlich die Abschätzungen:

$$(11) \qquad \lambda \leq \sqrt{\sum\sum (a_{ik})^2} \quad \text{und} \quad \lambda \leq \operatorname*{Max}_{(i)} \sum_{(k)} |a_{ik}|$$

unmittelbar folgen. Beide Abschätzungen (11) lassen sich noch verschärfen. Für die Zweite soll hier die einfache Herleitung der verschärften Abschätzung:

$$(12) \qquad \lambda \leq \operatorname*{Max}_{(i)} \left(a_{ii} + \sum_{(k)}{}' |a_{ik}|\right) \quad \text{mit} \quad \sum{}' \text{ für } k \neq i$$

angegeben werden. — Es sei λ der größte Eigenwert der Matrix $A = (a_{ik})$ und $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ein dazugehöriger Eigenvektor. Die i-te Komponente z_i habe den größten Betrag unter den Komponenten $z_1, \ldots, z_n$. Wir dürfen annehmen, daß $z_i = 1$ und $|z_k| \leq 1$ für $k \neq i$ ist. Dann gilt speziell die Gleichung bzw. Abschätzung:

$$(13) \qquad \lambda = a_{ii} + \sum{}' a_{ik} \cdot z_k \leq a_{ii} + \sum{}' |a_{ik}| \leq \operatorname*{Max}_{(i)} \left(a_{ii} + \sum{}' |a_{ik}|\right),$$

die zu beweisen war.

c) Bestimmung einer speziellen Lipschitz*-Grenze und Abschätzung von Lösungen.* Wir betrachten als spezielles Beispiel das Differentialgleichungssystem:

$$(1) \qquad y_1' = 1 - y_1 \cdot y_2, \quad y_2' = y_1 - y_2^2.$$

Man erkennt leicht, daß $Y_1(x) = 1$, $Y_2(x) = 1$ eine Lösung ist. Wir wollen die Nachbarlösungen abschätzen und verwenden hierzu die Funktion $p(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Dann gilt nach Satz 27 für jede Lösung: $y_1(x), y_2(x)$ die Abschätzung:

$$(2) \qquad \sqrt{(y_1(x) - Y_1(x))^2 + (y_2(x) - Y_2(x))^2} \leq g(x) \quad \text{für} \quad x \geqq 0,$$

wenn $g(x)$ die Maximallösung der Differentialgleichung:

$$(3) \qquad g' = L^*(x; g) + r(x)$$

mit

$$L^*(x; g) = \overline{\text{fin}}\, \frac{1}{|\mathfrak{z}|} \cdot \left(\mathfrak{z} \cdot \left(\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x) + \mathfrak{z}) - \mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x))\right)\right)$$

unter der Nebenbedingung: $|\mathfrak{z}| = g$, $r(x) = |\mathfrak{F}(x; \mathfrak{Y}(x)) - \mathfrak{Y}'(x)|$ und dem Anfangswert: $g(0) = |\mathfrak{y}(0) - \mathfrak{Y}(0)|$ ist. Nach Einsetzen der speziellen Werte erhalten wir ausführlicher:

$$(4) \qquad g(0) = \sqrt{(y_1(0) - 1)^2 + (y_2(0) - 1)^2}, \qquad r(x) = 0 \quad (\mathfrak{Y}(x) \text{ ist Lösung!})$$

und für die Lipschitz-Grenze das Maximum:

$$(5) \qquad L^*(x; g) = \frac{1}{g} \cdot \operatorname{Max}\left(z_1(-z_1 - z_2 - z_1 z_2) + z_2(z_1 - 2z_2 - z_2^2)\right)$$

unter der Nebenbedingung: $z_1^2 + z_2^2 = g^2 = \text{const}$. Mit Hilfe dieser Bedingung vereinfachen wir zunächst:

$$L^*(x;g) = \frac{1}{g} \cdot \text{Max}\,(-g^2 - z_2^2 - z_2\, g^2), \tag{6}$$

setzen die Parameterdarstellungen: $z_1 = g \cdot \sin(t)$ und $z_2 = g \cdot \cos(t)$ ein und lösen die Extremumsaufgabe:

$$L^*(x;g) = \text{Max}\left(-g(1 + \cos^2 t + g \cdot \cos t)\right). \tag{7}$$

Durch Nullsetzen der Ableitung erhalten wir die Gleichung:

$$\dot{g} \cdot \sin(t) + 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) = 0. \tag{8}$$

Es ist also notwendig entweder: $\sin(t) = 0$ mit $\cos(t) = \pm 1$ oder: $2 \cdot \cos(t) = -g$, wobei die letzte Gleichung allerdings nur für $g \leqq 2$ in Frage kommt. Für $g \leqq 2$ haben wir danach zu entscheiden zwischen den drei Extremwerten:

$$L^*(x;g) = \text{Max}\,(-2g - g^2; -2g + g^2; -g + \tfrac{1}{4}g^3) = -g + \tfrac{1}{4}g^3, \tag{9}$$

wobei die Entscheidung stets zugunsten des letzten ausfällt. Für $g > 2$ kommt dieser Ausdruck aber gerade nicht in Frage, so daß wir uns dann für den zweiten entscheiden müssen. Wir erhalten zusammen

$$L^*(x;g) = -g + \tfrac{1}{4}g^3 \text{ für } g \leqq 2 \text{ und } L^*(x;g) = -2g + g^2 \text{ für } g \geqq 2. \tag{10}$$

Wir lösen jetzt die Differentialgleichung (3) mit $g(0) = g_0$, wobei wir die drei Fälle: $g_0 < 2$, $g_0 > 2$ und $g_0 = 2$ gesondert rechnen. Für $g_0 < 2$ lautet die Differentialgleichung:

$$g' = -g + \tfrac{1}{4}g^3, \quad \text{solange} \quad g < 2 \text{ ist.} \tag{11}$$

Sie hat die eindeutige Lösung:

$$g(x) = \frac{2g_0}{\sqrt{(4 - g_0^2) \cdot e^{2x} + g_0^2}}, \tag{12}$$

welche für $x \geqq 0$ stets kleiner als 2 bleibt.

Für $g_0 > 2$ lautet die Differentialgleichung:

$$g' = -2g + g^2, \quad \text{solange} \quad g > 2 \text{ ist.} \tag{13}$$

Sie hat die eindeutige Lösung:

$$g(x) = \frac{2g_0}{g_0 - (g_0 - 2) \cdot e^{2x}}, \tag{14}$$

welche für $x \geqq 0$ stets größer als 2 bleibt und für $x < \frac{1}{2} \ln \frac{g_0}{g_0 - 2}$ existiert.

Für $g_0 = 2$ lautet die Lösung: $g(x) = 2$, da dann die Lösung (12) und die Lösung (14) mit dieser Lösung zusammenfallen.

Besonders interessant ist der Fall: $g_0 < 2$. In diesem Falle konvergiert $g(x)$ nach (12) mit wachsendem x monoton gegen Null. Dieses hat für alle Nachbarlösungen: $y_1(x)$, $y_2(x)$ der Lösung: $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ des Differential-

gleichungssystems (1), welche für $x=0$ der Abschätzung:

$$(y_1(0)-1)^2+(y_2(x)-1)^2<2^2=4$$

genügen, zur Folge, daß sie sämtlich mit wachsendem x asymptotisch gegen die Lösung: $Y_1(x)=1$, $Y_2(x)=1$ streben.

Das letzte Beispiel wurde dem Verfasser zur Untersuchung nach seinen Methoden von HERMANN SCHMIDT vorgelegt. Die Darstellung der Lösungen in der Form: $y_i=u_i\cdot\frac{1}{u_0}$ für $i=1,2$, wo u_k für $k=0,1,2$ dem zyklischen linearen Differentialgleichungssystem mit festen Koeffizienten: $u_k'=u_{k-1}$ (Indizes mod 3) genügt, zeigt unter anderem, daß der Kreisradius 2 bei der letzten Abschätzung nicht durch einen größeren als $\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}=2{,}12\ldots$ ersetzt werden kann, da jede für $x=0$ auf der Ebene: $y_1+y_2+1=0$ beginnende Lösung stets in dieser Ebene verbleibt, also nicht die Asymptote: $Y_1=Y_2=1$ haben kann. Die Abschätzung ist also als sehr gut zu bezeichnen.

Literatur.

[1] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin 1951. — [2] GIULIANO, L.: Su un notevole teorema di unicità per systemi di equazioni differentiali ordinarie. Atti accad. Italia VII.1, 330—336 (1940). — [3] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [4] MCSHANE, E. I.: On the uniqueness of the solutions of differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 755—757 (1939). — [5] NAGUMO, M.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Jap. J. Math. **3**, 107—112 (1926). — [6] OSGOOD, W. F.: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $y'=f(x;y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung. Mh. Math. Phys. **9** (1898). — [7] PEANO, G.: Math. Ann. **37**, 482 (1890). — [8] PERRON, O.: Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y'=f(x;y)$. Math. Ann. **76**, 471 (1915). — [9] PERRON, O.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. **28**, 216—219 (1928). — [10] SANSONE, G.: Equazioni differenziali nel campo reale, Parte sec. 2. ed., Cap. VIII. Bologna 1949. — [11] SCORZA-DRAGONI, G.: Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equatione differenziale. Rend. Circ. Mat. Palermo **54**, 444 (1930). — [12] TAMARKINE, J.: Sur le theorème d'unicité des solutions des equations differentielles ordinaires. Math. Z. **16**, 207—213 (1923).

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 28. März 1955.)

HORNFECK, B.
Math. Zeitschr. Bd. 62, S. 502 (1955)

Berichtigung zur Arbeit:

Ein Satz über die Primzahlmenge.

Von

BERNHARD HORNFECK.

Die Behauptung, daß die Primzahlmenge total irreduzibel sei, wurde in meiner Arbeit (diese Zeitschrift Bd. **60**, S. 271—273) durch den Nachweis, daß eine Zerlegung in einen endlichen und einen unendlichen Summanden unmöglich ist, reduziert auf die Behauptung, daß eine Zerlegung in zwei unendliche Summanden nicht existiert. Um letzteres zu beweisen, wurde die Abschätzung

$$c_1(k, b_1, b_2, \ldots, b_k) = c_7 \left\{ \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{k-v_s} \right\}^{-1} \tag{9}$$

benutzt. Beim genauen Studium des Beweises für (9) zeigt sich jedoch, daß c_7 noch von k abhängen kann [KNÖDEL, W.: Sätze über Primzahlen. Mh. Math. **55**, 62—75 (1951)]. Nur unter der Annahme der Hypothese, daß (9) schon gleichmäßig in k gilt, ist also der Satz bewiesen. Ich danke Herrn ERDÖS dafür, daß er so liebenswürdig war, mich auf diese Lücke aufmerksam zu machen.

Berlin, Mathematisches Institut der Freien Universität.

(Eingegangen am 28. Februar 1955.)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

Soeben erschien:

XXXIII. Band:

Algebra

Von Dr. **B. L. van der Waerden,** Professor der Mathematik an der Universität Zürich. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Vierte Auflage der Modernen Algebra. Erster Teil. VIII, 292 Seiten Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen DM 29,60

Inhaltsübersicht: Zahlen und Mengen. — Gruppen. — Ringe und Körper. — Ganze rationale Funktionen. — Körpertheorie. — Fortsetzung der Gruppentheorie. — Die Theorie von Galois. — Unendliche Körpererweiterungen. — Reelle Körper. — Bewertete Körper. — Sachverzeichnis.

Aus den Besprechungen der dritten Auflage: Das Buch bietet eine glückliche Synthese der klassischen Algebra mit den modernen Begriffen der Gruppen-, Körper-, Bewertungs- und Idealtheorie sowie der Theorie der hyperkomplexen Zahlen. Die Darstellung ist klar und für die Einführung mit großem Geschick abgefaßt. Die drei ersten Kapitel dienen der Vorbereitung und enthalten die Grundbegriffe über Mengen, Gruppen, Ringe, Körper und Ideale. Dem schließt sich wesentlich die Theorie der kommutativen Körper an; sie wird bis zum Begriff der Bewertung eines Körpers geführt. Zahlreiche eingestreute Aufgaben unterstützen die Probe auf das Verständnis des Textes.

„Zeitschrift für angew. Mathematik und Mechanik."

LXXV. Band:

Continuous Transformations in Analysis with an Introduction to Algebraic Topology

By **T. Rado,** Research Professor of Mathematics in the Ohio State University, and **P. V. Reichelderfer,** Professor of Mathematics in the Ohio State University. Mit 53 Textabbildungen. VII, 442 Seiten Gr.-8°. 1955.

DM 56,—; Ganzleinen DM 59,60

Table of Contents: Introduction. **Background in Topology:** Survey of general topology, of Euclidean spaces, of Abelian groups. Mayer complexes. Formal complexes. General cohomology theory. Cohomology groups in Euclidean spaces. — **Topological study of continuous transformations in R^n:** Orientation in R^n. The topological index. Multiplicity functions and index functions. — **Background in Analysis:** Survey of functions of real variables. Functions of open intervals in R^n. — **Bounded variation and absolute continuity in R^n:** Measurability questions. Bounded variation and absolute continuity with respect to a basefunction, to a multiplicity function. Essential bounded variation and absolute continuity. Bounded variation and absolute continuity in the Banach sense. — **Differentiable transformations in R^n:** Continuous transformations in R^1. Local approximations in R^n. Special classes of differentiable transformations in R^n. — **Continuous transformations in R^2:** The topological index in R^2. Special features of continuous transformations in R^2. Special classes of differentiable transformations in R^2. Index. Bibliography.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung

Von **R. Courant**, New York.

Erster Band:

Funktionen einer Veränderlichen

Dritte, verbesserte Auflage. Mit 126 Textfiguren. XI, 450 Seiten Gr.-8°. 1955.
Ganzleinen DM 33,—

Inhaltsübersicht: Vorbereitungen. — Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung. — Differential- und Integralrechnung der elementaren Funktionen. — Weiterer Ausbau der Integralrechnung. — Anwendungen. — Die Taylorsche Formel und die Annäherung von Funktionen durch ganze rationale. — Exkurs über numerische Methoden. — Unendliche Reihen und andere Grenzprozesse. — Fouriersche Reihen. — Die Differentialgleichungen der einfachsten Schwingungsvorgänge. — Sachverzeichnis.

Das Bestreben des Verfassers der in weiten Kreisen bekannten „Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung" ist darauf gerichtet, den Stoff der Anfänger-Vorlesungen in einer undogmatischen, lesbaren Form darzubieten und abstrakte Begriffe anschaulich zu motivieren.

Der in der dritten, wesentlich veränderten Auflage vorliegende erste Band entwickelt in organischer Weise die Differential- und die Integralrechnung einer Veränderlichen nebeneinander. Eine anschauliche Begründung der Fragestellungen steht im Vordergrund; jedoch wird an keiner Stelle auf eine strenge mathematische Betrachtung verzichtet. Im Anschluß an die mathematischen Resultate werden fast immer Anwendungen aus der Physik und Chemie explizit dargestellt. So ist das Buch für das Studium der Naturwissenschaften und der rein mathematischen Disziplinen, für den Ingenieur und für den Lehrer wertvoll.

An Veränderungen gegenüber den früheren Auflagen seien erwähnt: Ausführliche Betrachtung des Prinzips der vollständigen Induktion; Motivierung der präzisen Grenzwertdefinition; Intervallschachtelung und Zahlenkontinuum; Iterationsverfahren; Weierstrass'scher Approximationssatz; Bernouillische Polynome und Eulersche Summenformel. Ferner finden sich viele neue Beweise.

Zweiter Band: **Funktionen mehrerer Veränderlicher**
Dritte, verbesserte Auflage. Erscheint im Herbst 1955

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.